David Gomes Costa

SISTEMAS DE LÓGICA MODAL EM DEDUÇÃO NATURAL

Natal, Janeiro de 2010

David Gomes Costa

SISTEMAS DE LÓGICA MODAL EM DEDUÇÃO NATURAL

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Filosofia da UFRN como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Orientadora: Profa. Dra. Maria da Paz Nunes de Medeiros

Natal, Janeiro de 2010.

Catalogação da Publicação na Fonte.
Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes (CCHLA).

Costa, David Gomes.
Sistemas de lógica modal em dedução natural / David Gomes Costa. – 2010.
113 f.

Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes. Programa de Pós-graduação em Filosofia, 2010.
Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria da Paz Nunes de Medeiros.

.

1. Lógica. 2. Modalidade (Lógica) 3. Normalização. I. Medeiros, Maria da Paz Nunes de. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/BSE-CCHLA CDU 16

TERMO DE APROVAÇÃO

David Gomes Costa

SISTEMAS DE LÓGICA MODAL EM DEDUÇÃO NATURAL

Dissertação de mestrado sob o título “Sistemas de Lógica Modal em Dedução Datural”, defendida por David Gomes Costa e aprovada em Janeiro de 2010, em Natal, Estado do Rio Grande do Norte, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Profª.Drª. Maria da Paz Numes de Medeiros
Orientadora/ UFRN

Prof. Dr. José Eduardo de Almeida Moura
Examinador/ UFRN

Prof. Dr. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira
Examinador/PUC-RIO

Natal, janeiro de 2010

Já não posso mais dedicar às
pessoas, mas dedico às memórias de
Mirabeau e Iunah.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à minha mãe Maria das Dores (sine qua non) e a minha querida irmã Daniela. Agradeço ao meu irmão Alexandre pelo companheirismo e confiança nos momentos em que eles faltavam em todos, incluindo a mim mesmo. À minha orientadora e letradora em lógica Profa. Maria da Paz que muito pacientemente me orientou desde o período de graduando, e aos professores Daniel Durante e José Eduardo pela grande relevância que tiveram em minha formação. Aos companheiros de copo e de cruz Ary, Stanley, Lony, Leonardo e, por que não, Edgar. Aos três grandes frutos que o estudo de lógica me deu: Flammarion (uma grande cabeça), Arthur, e Patrick. Aos meus alunos queridos do CEFET/IFRN. Por fim agradeço a Torf. Viva Torf.

Cansada de observar-se na corrente
Que os acontecimentos refletia,
Reconcentrando-se em si mesma, um dia,
A Natureza olhou-se interiormente!

Baldada introspecção! Noumenalmente
O que Ela, em realidade, ainda sentia
Era a mesma imortal monotonia
De sua face externa indiferente!

E a Natureza disse com desgosto:
"Terei somente, porventura, rosto?!
"Serei apenas mera crusta espessa?!

"Pois é possível que Eu, causa do Mundo,
"Quando mais em mim mesma me aprofundo
"Menos interiormente me conheça?!"

(Natureza íntima, Augusto dos Anjos)

Sumário

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E TEOREMAS

Ax	Axioma
Axioma 1	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
Axioma 2	$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
Axioma 3	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$
Axioma 4	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
Axioma 5	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
Axioma 6	$\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
Axioma 7	$\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
Axioma 8	$(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$
Axioma 9	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$
Axioma 10	$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
K	$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$
T	$\Box\alpha \rightarrow \alpha$
4	$\Box\alpha \rightarrow \Box\Box \alpha$
MP	Modus Ponens : $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$
RN	Regra de Necessitação : $\vdash \alpha \vdash \Box\alpha$
TD	Teorema da Dedução : $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ / $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
Ral1	Resultado Auxiliar 1 : $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$
Ral2	Resultado Auxiliar 2 : $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta) \vdash (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \delta$
IMC	Introdução de Múltiplas conjunções : $\alpha_1, ..., \alpha_n \vdash (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n)$
EMC	Eliminação de Múltiplas conjunções : $(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \vdash \alpha_i$
IC	Implicação das conjunções : $\alpha_1 \rightarrow \beta_1, ..., \alpha_n \rightarrow \beta_n \vdash (\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow (\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_n)$
SH	Silogismo Disjuntivo
CP	Contraposição
DN	Dupla Negação
RM	$\vdash \alpha \rightarrow \beta \vdash (\Box \alpha \rightarrow \Box \beta)$
K1	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$
K2	$\vdash ((\Box\alpha \wedge \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta))$

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E TEOREMAS

RR	$(\alpha_1 \wedge \alpha_2,..., \wedge \alpha_i) \rightarrow \beta \vdash (\Box\alpha_1 \wedge \Box\alpha_2,... \wedge \Box\alpha_i) \rightarrow \Box\beta$
D	$\Box A \rightarrow \Diamond A$
B	$\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$
5 (E)	$\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$
Comut.	Comutatividade da $\wedge$ ou da $\vee$
Df$\Diamond$	$\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$
Df$\Box$	$\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$
T$\Diamond$	$A \rightarrow \Diamond A$
5$\Diamond$	$\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$
Hip. Ind. ou H.I.	Hipótese de Indução

RESUMO

A formalização de sistemas de lógica em dedução natural traz muitas vantagens meta-teoréticas, das quais é sempre destacada a prova de normalização. Os sistemas de lógica modal até bem recentemente não eram costumeiramente tratados pelo viés da dedução natural, contudo algumas formulações, provas de normalização e tentativas de provas surgiram. Esse trabalho é uma apresentação de alguns sistemas importantes de lógica modal em dedução natural já existentes, e de alguns procedimentos de normalização para eles, mas é também, e principalmente, a apresentação de uma hierarquia de sistemas de lógica modal em Dedução Natural do sistema K ao sistema S5 e um esquema da prova de normalização do sistema K, que é modelo para a normalização nos outros sistemas.

ABSTRACT

Formalization of logical systems in natural deduction brings many metatheoretical advantages, which Normalization proof is always highlighted. Modal logic systems, until very recently, were not routinely formalized in natural deduction, though some formulations and Normalization proofs are known. This work is a presentation of some important known systems of modal logic in natural deduction, and some Normalization procedures for them, but it is also and mainly a presentation of a hierarchy of modal logic systems in natural deduction, from K until S5, together with an outline of a Normalization proof for the system K, which is a model for Normalization in other systems.

INTRODUÇÃO

Existem diversos métodos capazes de representar sintaticamente a noção de conseqüência lógica e com isso servirem como procedimento de dedução (prova, derivação, demonstração). A opção por um desses métodos deve levar em conta características bem diversas como simplicidade de execução, propriedades meta-teoréticas, adaptação à semântica etc. O método de prova mais usado pelos lógicos desde a criação da lógica formal, e por um longo período, foi o método axiomático. A justificativa para isso pode residir no fato de que parte dos lógicos e matemáticos até 1931 empreendiam o projeto, proposto por David Hilbert, de provar que a matemática poderia se reduzir a um conjunto finito, completo e consistente, de axiomas. Por esta razão, o desenvolvimento de um outro método de dedução provavelmente não era algo que estivesse na agenda dos lógicos desse período. Contudo, devido a algumas descobertas o uso desse método entre matemáticos e lógicos foi deixando de ser imprescindível. Dentre essas descobertas podemos citar os teoremas de incompletude de Kurt Gödel, em 1931, que provam que uma teoria axiomática recursivamente enumerável não pode ser completa e consistente ao mesmo tempo. Embora os resultados do teorema afetem qualquer projeto fundacionalista de lógica, seja lá qual for o formalismo usado, o fato de sabermos que não é possível adquirir o tal conjunto de axiomas (completo e consistente) é suficiente para não termos uma razão específica, baseada no projeto de Hilbert, para preferirmos esse método a outro. Podemos também observar a queda de uma certa concepção realista quanto à adequação dos axiomas ao mundo, com o advento das geometrias não-euclidianas (Nagel & Newman, 2001), que mudando o axioma das paralelas mantém sistemas consistentes. Conseqüência disso é que axiomas deixam de ser vistos como “verdades auto-evidentes”, e assim terem um decréscimo em sua relevância filosófica.

Embora seja importante lembrar os esforços de Łukasiewics em 1926 e de Jaśkowski (que mencionamos em seguida) já em 1929, o ano de 1934, foi decisivo para a primeira mudança no uso dos métodos de dedução pelos lógicos. Neste mesmo ano (1934), Gerhard Gentzen e Stanaslaw Jaśkowski sem tomarem conhecimento de seus interesses comuns, trabalhavam na criação de novos métodos de dedução. Um, o cálculo de seqüentes, é uma das ferramentas lógicas mais usadas em trabalhos técnicos avançados até os dias atuais (Pelletier, 1999), e é creditado a Gentzen. Já o outro recebe o título de "dedução natural" e foi desenvolvido pelos dois autores de formas bem distintas. Definir as características necessárias e suficientes que fazem um sistema ser de dedução natural é uma tarefa muito difícil; de certo modo isso se dá pelo fato de que o nome escolhido para o método não é tão direto com respeito às suas características quanto o método axiomático, por exemplo, ou mesmo o cálculo de seqüentes[1]. Além disso, o "Dedução Natural" é controverso. Dizer que ao se usar o método estão sendo feitas "deduções naturais" é como atribuir a ele uma característica naturalizada no sentido forte, no sentido de pré-teoreticamente aceita. Extrapolando essa noção pode-se fazer a confusão de atribuir ao método um caráter "intrinsecamente racional" ou ainda "universalmente válido". De fato, o próprio Gentzen diz quando trata de sua criação "... Eu pretendia primeiro criar um sistema formal que fosse tão próximo quanto possível do raciocínio real"[2] (Gentzen, 1969 pg 68), e de suas pretensões que "Nós desejamos criar um formalismo que reflita tão precisamente quanto possível o raciocínio lógico real envolvendo provas matemáticas."[3](Gentzen, 1969 pg 74). Contudo, a história da dedução natural nos deixou claro que essa noção é exagerada. Pode-se mais facilmente definir sistemas de dedução natural por um conjunto de características que eles devem ter para que sejam considerados sistemas desse tipo. Entre elas Quine destaca como mais importante a regra de Introdução do Condicional, chegando inclusive a chamá-la de "A cruz da dedução natural*"*[4] no seu livro *Methods of Logic* de 1950. De fato, se uma mudança óbvia nesse método com relação ao axiomático é não partir de proposições (sentenças) não demonstráveis, isso se deve à noção de "hipótese" que é introduzida por essa regra, e por isso aqui tendemos a concordar com Quine. E mesmo sem admitir que possuir essa regra seja condição necessária ou suficiente para que um sistema seja de dedução natural, todos os sistemas que vamos considerar como sendo usuários desse método têm essa regra como primitiva.

Mesmo com o pouco conteúdo tratado até aqui precisamos notar uma distinção de níveis de propriedades quando queremos qualificar sistemas de lógica. Nessa separação

---

[1] Quando se tem a definição de seqüente fica muito fácil compreender porque o método se chama cálculo de seqüentes.

[2] *I intended first to set up a formal system which comes as close as possible to actual reasoning.*

[3] *We wish to set up a formalism that reflects as accurately as possible the actual logical reasoning involved in mathematical proofs.*

[4] *the crux of the natural deduction.*

precisamos levar em conta que relevância do ponto de vista filosófico e relevância do ponto de vista formal não são sempre a mesma coisa. Quando mencionamos que o método axiomático perdeu, em certo sentido, força com a derrocada do projeto de Hilbert estávamos nos referindo a uma propriedade formal de tal método, a de ser muito bem adequada ao projeto em questão. Nessa ocasião também a lógica como um todo perde uma propriedade filosoficamente relevante, qual seja a de servir de fundamento da matemática. Não acreditamos que propriedades formais estejam intrinsecamente ligadas a propriedades filosóficas no caso da lógica, mas em alguns casos propriedades formais são importantes para provar que determinados sistemas têm propriedades filosoficamente relevantes. O próprio termo “método de dedução” merece ser abordado sob essa perspectiva. Do ponto de vista filosófico, pode ser defensável dizer que existe um único método de dedução que difere em suas apresentações unicamente pelo formalismo usado, isto é, existe um só método de dedução, filosoficamente falando, e existem vários métodos de dedução, formalmente falando. Se fôssemos prosseguir tratando das duas acepções de “métodos de dedução” é provável que precisássemos de dois termos para que não houvesse confusão quanto a que sentido de “método de dedução” nos referimos, contudo o corpo do texto trará essa expressão com um sentido apenas.

Juntando um pouco as discussões acima, já podemos dizer que uma das pretensões iniciais na implementação do método de dedução natural, a de ser tão próxima quanto possível do raciocínio real, é uma pretensão quanto a uma propriedade filosoficamente relevante, mas que não procede, ou pelo menos não se pode provar que procede. Contudo, outras vantagens decorrem do uso desse método, tanto formal quanto filosoficamente relevantes. A mais imediata delas diz respeito à aplicação do método: nesses sistemas, a realização das deduções é imensamente mais simples e, se as regras de inferência dos sistemas de dedução natural não são completamente “naturais” no sentido citado acima, a maioria delas é certamente mais intuitiva e menos artificial do que a introdução de sentenças “auto-evidentes” em uma prova. Uma outra vantagem diz respeito às propriedades meta-teoréticas do método de dedução natural. Aqui temos um caso especial onde se vê que uma propriedade formal rende uma propriedade filosoficamente relevante. Em alguns desses sistemas, a prova de consistência (de relevância filosófica) segue muito facilmente de um teorema que garanta que o sistema é Normal, em um sentido que discutiremos amplamente ao longo do trabalho (mas que podemos adiantar que é de relevância formal). Essas duas vantagens são justificativas para a elaboração do nosso trabalho e para nossa opção pelo método formal de dedução natural.

O trabalho se propõe a dar o primeiro passo na criação de uma hierarquia de sistemas de dedução natural para as lógicas modais mais conhecidas. Essas lógicas por um longo período foram abordadas apenas através do método axiomático, e quando abordadas em dedução natural, como veremos ao longo do trabalho, têm diversos problemas em suas formulações para os fins de serem de fácil aplicação e “meta-teoreticamente relevantes” (normalizáveis), ou até mesmo equivalentes aos sistemas modais axiomáticos. Nos dois primeiros capítulos discutiremos extensivamente a formulação de sistemas de dedução natural em lógica proposicional clássica e modal, a prova do teorema de normalização, e os problemas dos teoremas de normalização de lógicas modais tomando como base os trabalhos de Dag Prawitz (Prawitz, 1965) e Maria da Paz N. Medeiros (Medeiros, 2006). O terceiro capítulo apresenta uma prova de equivalência entre o sistema de Medeiros e o sistema S4. Esse capítulo serve como piloto para outras provas de equivalência, apresentadas no capítulo 4 de sistemas de dedução natural propostos por nós para compor a hierarquia pretendida. Além disso, também no capítulo 4 apresentamos uma breve história dos sistemas de lógica modal em dedução natural e algumas razões para não optarmos pelo tipo de sistema já existente. O capítulo 5 apresenta uma prova de normalização do nosso sistema NK que é equivalente ao sistema K da lógica modal axiomática, levando em conta os percalços pelos quais já passaram alguns autores ao realizar essa tarefa, e serve de base para todos os outros sistemas modais normais. Por fim, encerramos o trabalho com considerações finais sobre tudo que foi feito ao longo do trabalho e com a discussão sobre algumas perspectivas referentes à ampliação desse nosso projeto.

1 SISTEMAS DE DEDUÇÃO NATURAL E O TEOREMA DE NORMALIZAÇÃO

A idéia de sistemas lógicos, clássicos e intuicionistas, em dedução natural pode ser atribuída independente e concomitantemente a Gerhard Gentzen e Stanaslaw Jaśkowski. Na tentativa de "naturalizar" a intuição sobre o cálculo lógico, Gentzen substitui o uso de axiomas por regras de inferência nos sistemas de lógica que começou a desenvolver. Tal método talvez não tenha rendido o caráter intuitivo, já discutido na introdução, que era pretendido, mas rendeu uma vantagem significativa: a prova de Normalização[5]. Da prova de Normalização de um sistema de dedução natural, e do princípio de sub-fórmula, deriva-se facilmente uma prova da Consistência do sistema em questão, além de outras propriedades importantes.

A prova de Normalização só aparece na literatura especializada em 1965[6], mais de 30 anos após os trabalhos de Gentzen, com a tese doutoral de Dag Prawitz (Pelletier, 1999). Nos seus capítulos iniciais, o trabalho de Prawitz apresenta a linguagem, definições e propriedades principais de um sistema de dedução natural do *tipo-Gentzen* em lógica clássica, intuicionista e minimal para a lógica de predicados de primeira ordem. No capítulo 6 Prawitz apresenta alguns sistemas de lógica modal e um procedimento de normalização para eles. Abaixo apresentamos a linguagem, as definições usuais e as regras de inferência contidas no trabalho de Prawitz para o fragmento proposicional, e sua prova de normalização. Em seguida os sistemas de lógica modal em dedução natural e o procedimento de normalização de tais sistemas. Faremos isso na forma de uma tradução explicada do trabalho desse autor.

1.1 . A LINGUAGEM 'L'

A linguagem L tem o seguinte alfabeto.

1 – **Variáveis sentenciais** P, Q, R e S com possíveis subscritos em números naturais,

---

[5] Vamos tratar pelo nome de 'normalização' pura e simplesmente o que a literatura especializada chama de 'normalização fraca'. Todo trabalho trata apenas desse tipo de normalização e a repetição desse termo seria de uma precisão terminológica desnecessária.

[6] Também é importante ressaltar os trabalhos de A. R. Raggio a partir de 1968.

gerando assim um conjunto infinito enumerável dessas variáveis.

2 – **Constantes lógicas**:

(a) Uma constante sentencial de falsidade: $\bot$

(b) Os conectivos sentenciais: $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$

3 – **Símbolos auxiliares**. (,).

4 – **Fórmulas**:

Fórmula atômica: *A* é uma fórmula atômica de L se e somente se:

(I) *A* é $\bot$; ou

(II) *A* consiste de uma das variáveis sentenciais de L.

Fórmula:

1) Uma fórmula atômica de L é uma fórmula de L.

2) Se *A* e *B* são fórmulas de L, então também o são $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $(A \rightarrow B)$.

Símbolos definidos. Uma vez que não existem os símbolos ¬ e ↔ ,eles são definidos do modo convencional ou seja, $\neg A =_{\mathrm{df}} A \rightarrow \bot$ e $A \leftrightarrow B =_{\mathrm{df}} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Observação 1: Uma fórmula, não atômica, tem exatamente uma das formas seguintes: $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $(\neg A)$ e os símbolos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e $\neg$ são os *símbolos principais* das respectivas fórmulas. E o *escopo* de uma constante lógica em uma fórmula é a parte desta fórmula onde a constante lógica é símbolo principal.

O **grau de uma fórmula** g(*A*) é definido como o número de ocorrências de constantes lógicas em (*A*) excetuando $\bot$.

Sub-Fórmula. A noção de sub-fórmula é definida indutivamente por:

1) *A* é uma sub-fórmula de *A*.
2) Se $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$, ou $(B \rightarrow C)$ é uma sub-fórmula de *A*, então *B* e *C* o também são.

Observação 2: As letras latinas maiúsculas de *A* a *O* em itálico são usadas como meta-variáveis de fórmulas. Quando quisermos diferenciar ocorrências distintas de uma mesma fórmula podemos também usar sobrescritos como A, A^1, A^2, etc. Destacamos ainda o uso das letras gregas Γ e Δ para representar conjuntos de fórmulas.

1.2 . REGRAS DE INFERÊNCIA E DEDUÇÕES

Nos parágrafos 2 e 3 do seu livro, Prawitz apresenta regras de inferência para os sistemas de dedução natural e define o que são deduções. Abaixo, iremos reproduzir as regras de inferência como apresentadas por Prawitz e também a definição detalhada que ele faz de dedução.

1.2.1 - Regras de Inferência

Excetuando a constante lógica ⊥, todas as constantes lógicas têm enunciadas regras de introdução e de eliminação. Para a constante ⊥ são apresentadas duas regras, mas essas regras definem apenas o sistema de lógica que se está usando. Assim, a regra $\bot_c$ denota a regra “absurdo clássico”, e $\bot_i$ o caso particular dessa regra que é a regra do “absurdo intuicionista”. Nos esquemas abaixo as letras cercadas por colchetes indicam que a regra de inferência em questão descarrega as hipóteses anteriormente assumidas.

$$(\mathrm{I}\land)\ \frac{A \qquad B}{A \land B} \qquad\qquad (\mathrm{E}\land)\ \frac{A \land B}{A} \quad \frac{A \land B}{B}$$

$$(\mathrm{I}\lor)\ \frac{A}{A \lor B} \quad \frac{B}{A \lor B} \qquad\qquad (\mathrm{E}\lor)\ \frac{A \lor B \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}$$

$$(\mathrm{I}\to)\ \frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A \to B} \qquad\qquad (\mathrm{E}\to)\ \frac{A \qquad A \to B}{B}$$

$$(\bot_i)\ \frac{\bot}{A} \qquad\qquad (\bot_c)\ \frac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{A}$$

Observação 3: Algumas restrições são impostas a essas regras como forma de facilitar os procedimentos que aparecem no decorrer do texto. A primeira restrição aparece nas duas regras do $\perp$, onde A deve ser diferente da constante lógica $\perp$. Mesmo não sendo uma restrição necessária, ela será útil mais adiante, e evitará casos de seqüências com repetições espúrias dessa mesma fórmula. A segunda restrição é para o caso das aplicações da regra $\perp_c$, nela A não pode ter a forma $(B\rightarrow \perp)$. Esta também não é uma restrição necessária à regra, mas é facilitadora das demonstrações a seguir. É fácil notar que nada se perde com essa restrição também, uma vez que uma sentença com essa forma pode sempre ser obtida por aplicação da regra (I→)[7].

Prawitz apresenta ainda as duas regras abaixo para a negação, que são da formulação dada por Gentzen.

$$\text{I}\neg)\ \frac{\begin{matrix}[A]\\ \perp\end{matrix}}{\neg A} \qquad\qquad \text{E}\neg)\ \frac{A \quad \neg A}{\perp}$$

Mas quando definimos a negação do modo como ela foi definida por Prawitz essas regras se tornam derivadas pelo uso das regras I→ e E→ .

1.2.2 - Definindo dedução de um modo mais preciso.

Prawitz conclui essa apresentação, que ele chama de informal, dizendo que pode-se diferenciar facilmente sistemas de dedução natural de acordo com o conjunto das regras usadas. Assim, para deduções em lógica minimal (M) podem ser usadas todas as regras de introdução e eliminação dos conectivos sentenciais (e quantificadores para sistemas de lógica de primeira ordem, é claro), para as deduções em lógica intuicionista (I) acrescenta-se a essas a regra $\perp_i$, e por fim, para a lógica clássica (C) todas as regras de introdução e eliminação dos conectivos sentenciais (e quantificadores também para um cálculo de primeira ordem) e mais a regra $\perp_c$. Em seguida Prawitz acrescenta definições mais precisas sobre deduções, e mais adiante diz que na verdade as regras de inferência não são suficientes para caracterizar sistemas de dedução natural.

---

[7] Uma demonstração disso pode ser encontrada em Prawitz 1965 pg. 21.

Árvore de fórmulas: Árvores de fórmulas são seqüências (entendidas aqui meramente como listas) de fórmulas em forma de árvores. Dizemos que π é uma árvore de fórmulas se: (i) π é uma fórmula, ou (ii) π é (π_1, π_2, …, π_n/*A*) onde π_1, π_2, … e π_n é uma seqüência de árvores de fórmulas, e a barra denota uma aplicação de regra de inferência que tem a fórmula *A* como conseqüência. (ii) é representada graficamente do modo abaixo onde o traço faz o papel da barra:

$$\frac{\pi_1\ \pi_2\ \dots\ \pi_n}{A}$$

Algumas noções concernentes a regras de inferência são acrescentadas por Prawitz. Quando (A_1, A_2, ... A_n/*B*) representa a instância de uma certa regra de inferência dizemos que A_1, A_2, ... A_n são as premissas e *B* a conseqüência dessa instância. Em uma instância (A, $A \rightarrow B$/ B) da regra I→ ou em uma instância ($B \vee C$, A, A/A) de regra E∨, as fórmulas *A* entre as premissas são chamadas de *premissas menores*, uma premissa que não seja uma premissa menor é uma *premissa maior*. Podemos definir as premissas de regras de introdução como as fórmulas imediatamente acima das conclusões das aplicações de regras de introdução sem distinção entre maiores e menores (uma exceção para isso surge no capítulo 2, mas lá apresentamos definições explícitas para a regra).

Como foi dito na introdução desta sub-seção, as regras de inferência não são suficientes para caracterizar completamente um sistema de dedução natural. Isso acontece porque as regras de inferência sozinhas não deixam claro como é feito o descarregamento de hipóteses[8] (quando ele é feito), e além disso, as aplicações de algumas regras de inferência são marcadas por restrições que são formuladas em termos de quais hipóteses as premissas das aplicações dependem. Prawitz divide aqui as regras de inferência em dois tipos, as impróprias, que descarregam hipóteses (E∨, I→ e $\bot_c$) e as próprias, o restante delas. O problema exposto acima, sobre a caracterização de um sistema de dedução natural a partir das regras de inferência, obviamente decorre das regras de inferência impróprias, por isso Prawitz as redefine como **regras de dedução**. Regras de dedução são regras que permitem inferências de fórmulas usando deduções como um tipo de “premissa”, e que permitem determinar de que conjunto de fórmulas a nova fórmula inferida depende. Desse modo cada fórmula que é premissa de aplicação de uma regra passa a estar associada a uma dedução (Apresentamos a

---

[8] Embora a palavra “Hypothesis” não apareça no texto de Prawitz pretendo usar essa tradução, uma vez que a alternativa seria a palavra “assunção” que não é de uso corrente na literatura especializada em português.

definição de dedução em Prawitz mais adiante). Assim, podemos dizer que para cada fórmula A que é premissa de aplicação da uma regra de inferência imprópria, a regra de dedução, análoga a esta regra de inferência, traz, além da fórmula A, o conjunto de fórmulas Γ, do qual se deduz A, como premissa. De modo mais claro, podemos entender cada premissa de uma regra de dedução como um par $\langle \Gamma, A \rangle$ onde a instância de uma regra é a relação entre esses pares do modo apresentado abaixo.

Regras de dedução*:*

E∨: $\langle\langle \Gamma_1, A \vee B\rangle, \langle \Gamma_2, C \rangle, \langle \Gamma_3, C \rangle, \langle \Delta, C \rangle\rangle$ onde $\Delta = \Gamma_1 \cup (\Gamma_2 - \{A\}) \cup (\Gamma_3 - \{B\})$.

I→: $\langle\langle \Gamma, B\rangle, \langle \Delta, A \rightarrow B\rangle\rangle$ onde $\Delta = \Gamma - \{A\}$

$\perp_c$: $\langle\langle \Gamma, \perp \rangle, \langle \Delta, A \rangle\rangle$ onde $\Delta = \Gamma - \{\neg A\}$ e A não tem a forma de $\perp$ ou de $\neg B$.

Assim, já é possível apresentar a definição de Prawitz para **Dedução**. π é uma dedução de uma fórmula A (em um sistema S de dedução natural) dependendo de um conjunto Γ de fórmulas se é satisfeita uma das condições abaixo:

1) Se A não é um axioma em S, então A é uma dedução em S de A dependente de $[A]$.

2) Se A é um axioma em S, então A é uma dedução em S dependendo do conjunto vazio de fórmulas.

3) Se π_i é uma dedução em S de A_i dependendo de Γ_i para todo $i \leq n$, então $(\pi_1, \pi_2,\dots, \pi_n/ B)$ é uma dedução em S de B dependendo de um conjunto de fórmulas Δ com tanto que a condição (i) ou a condição (ii) seja assegurada:

(i) $(A_1, A_2,..., A_n/B)$ é uma regra de inferência própria em S e Δ é a união de todos os Γ_i para $i \leq n$; ou

(ii) $\langle\langle\Gamma_1, A_1\rangle, \langle\Gamma_2, A_2\rangle,..., \langle\Gamma_n, A_n\rangle, \langle\Delta, B\rangle\rangle$ é uma instância de uma regra de dedução em S.

π é uma dedução em S de (A) a partir de Γ se e somente se π é uma dedução em S de (A) a partir de Γ ou de algum subconjunto de Γ.

***A* é deduzido de Γ** em um sistema S ($\Gamma \vdash_S A$) se e somente se existe uma dedução em S de A a partir de Γ. Quando Γ é o conjunto unitário $\{B\}$ podemos simplificar com $B \vdash_S A$.

Uma dedução de (A) dependendo do conjunto vazio (de premissas ou hipóteses) é uma **prova de (*A*)**. Dizemos que (A) é provado em S ($\vdash_S A$) se e somente se existe uma prova de (A) em S.

Estamos desde a introdução usando a palavra dedução como sinônima das palavras derivação, decisão, demonstração e por vezes até prova. Essas palavras, contudo, não têm um significado inequívoco devido às perspectivas filosófica e formal. É bem mais comum atualmente, ao contrário de como aparece aqui, que as palavras dedução e derivação sejam usadas em sentidos diversos. Dedução é uma palavra associada ao processo racional não automático de ligar certas premissas a uma conclusão, é um procedimento de relevância filosófica. Derivação, por outro lado é o objeto sintático que é resultado final do processo de dedução que, contudo, não precisa estar sempre ligado a uma dedução. Um exemplo é o caso onde se usa um provador automático de teoremas para a prova de certo teorema. Esse tipo de derivação, que não pressupõe uma dedução, por vezes recebe o nome de decisão. Temos ainda a palavra prova, que ao menos na lógica está associada a deduções ou derivações auto-contidas, isto é, que não carecem informação complementar, ou melhor, premissas. Aqui não entraremos no mérito dessa questão, usaremos as palavras dedução e derivação apenas para objetos sintáticos. Optamos, com o objetivo de tornar o texto mais corrente, pelo uso da palavra dedução apenas para sistemas de dedução natural e da palavra derivação para os sistemas Axiomáticos.

1.2.3 - Noções importantes em uma dedução.

Após a apresentação de todas essas definições sobre dedução, Prawitz traz algumas noções que facilitarão sua explanação. Abaixo, seguindo a seqüência do texto do autor, apresentamos uma lista com noções concernentes a árvores, a aplicações de regras de inferência e hipóteses. Fazemos isso de forma muito próxima à feita pelo autor com o objetivo de manter a precisão das definições.

ÁRVORES:

Aqui Prawitz diz que essas noções são expansíveis a árvores que não sejam necessariamente de fórmulas. Assim, π será usado como sendo uma árvore de fórmulas, Σ como uma seqüência de árvores ($\pi_{1,...}\ \pi_n$) incluindo a vazia (nesse caso Σ/A é igual a A).

Dizemos que A é uma **ocorrência de fórmula**[9] se A é uma fórmula que aparece em uma árvore de fórmulas π. Uma ocorrência só é idêntica a ela mesma, mas pode ter muitas similares que sejam da mesma forma dela.

Uma **fórmula inicial** em uma árvore de fórmulas π é uma ocorrência de fórmula que não está imediatamente abaixo de nenhuma ocorrência de fórmula em π. A **fórmula final** de π é a ocorrência de fórmula em π que não tem nenhuma ocorrência de fórmula imediatamente abaixo dela.

Um **fio** em π é uma seqüência A_1, A_2, ..., A_n de ocorrências de fórmulas onde:

(I) A_1 é uma fórmula inicial em π.

(II) A_i se posiciona imediatamente acima de A_{i+1} em π para cada i < n. Isto é, A_i é premissa de regra que tem A_{i+1} como conseqüência.

(III) A_n é a fórmula final de π.

Em um fio dizemos que A_i está acima de A_j se i < j, e que está abaixo se i > j no fio.

Se A é uma ocorrência de fórmula na árvore π, a **subárvore** de π determinada por A é: a árvore obtida a partir de π pela remoção de todas as ocorrências de fórmulas exceto A e as que aparecem acima dela.

Se A é uma ocorrência de fórmula em π, seja π_1, ..., π_n/A a subárvore de π

---

[9] Algumas vezes abreviaremos simplesmente como fórmula.

determinada por A, e sejam $A_1, ..., A_n$ as fórmulas finais de $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n$ respectivamente. Nós então dizemos que $A_1, ..., A_n$ são as ocorrências de fórmula imediatamente acima de A em π sendo consideradas na ordem da esquerda para a direita. Diremos também que A_i e A_j são **conectadas lado-a-lado** se i,j $\leq$ n.

Se Γ é um conjunto de fórmulas iniciais em π, então $(\Sigma/\Gamma/\pi)$ é a árvore obtida quando se escreve Σ sobre cada fórmula inicial em π que pertence a Γ. Se Σ ou Γ é vazio, então $(\Sigma/\Gamma/\pi) = \pi$. Quando $\Gamma = \{A\}$, Prawitz usa a notação $(\Sigma/A/\pi)$, e quando Γ é igual a uma série de ocorrências da fórmula (A) ele usa $(\Sigma/[A]/\pi)$. No formato gráfico ou de árvore temos:

$$\begin{array}{c} \Sigma \\ A \\ \pi \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \underline{\ \Sigma\ } \\ [A] \\ \pi \end{array}$$

O **comprimento**[10] de uma árvore de fórmula c(π) é o número de ocorrência de fórmulas nessa árvore.

APLICAÇÕES DE REGRAS DE INFERÊNCIA:

Seja B uma ocorrência de fórmula em uma dedução π e sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ todas as fórmulas imediatamente acima de B em π na ordem da esquerda para a direita. Se α demarca a aplicação de regra R em π, então $\alpha = (A_1, A_2, ..., A_n/B)$ tem a forma de uma instância de regra de inferência R. No caso de α ter a forma ao mesmo tempo de uma $\bot$- regra e outra regra qualquer é convencionado que α é uma aplicação de $\bot$- regra. Cada A_i imediatamente acima de B é uma premissa e B é a conseqüência da aplicação α.

HIPÓTESES:

Seja π uma dedução em um sistema S e A uma fórmula inicial em π. Então a ocorrência de fórmulas A **é um axioma** se tem a forma de um axioma de S e é uma **hipótese** se não tem.

---

[10] A definição indutiva seria: c(π) = 1 se π é uma fórmula e c(π) = c (π_1) + c(π_2) ... c(π_n) + 1 se $\pi = \dfrac{\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_n}{A}$ contudo, por mero interesse histórico manteremos todas as definições no estilo do autor.

Uma fórmula A em π é dependente de um conjunto de fórmulas Γ em π se a subárvore de π determinada por A é uma dedução dependente de Γ. Em especial a fórmula A depende de uma fórmula B que pertence ao conjunto Γ, são levados em conta casos especiais onde a fórmula B é uma hipótese.

Seja A uma hipótese em uma dedução π e seja f um fio que começa com A. Então, **A é descarregada em π** por aplicação α de regra R em uma fórmula C se e somente se C é a primeira fórmula em f onde uma das condições abaixo é assegurada:

I) R é E$\vee$, a premissa maior de α é da forma $A \vee D$ ou $D \vee A$ (para algum D), e C é a primeira ou segunda premissa menor de α respectivamente.

II) R é I$\rightarrow$, C é premissa de α, e a conseqüência de α tem a forma $A \rightarrow C$.

III) R é $\perp_c$, C é premissa de α, A tem a forma $\neg D$, onde D não é uma fórmula com negação, e a conseqüência de α é D.

Uma ocorrência de fórmula B é dependente na dedução π da hipótese A se B pertence ao fio f em π que começa com A, e A não é descarregada em π em uma ocorrência de fórmula acima de B.

Com isso encerramos as definições necessárias para a exposição que se segue. Na próxima subseção explanaremos sobre os princípios e teoremas que motivam este trabalho como um todo.

1.3 . O PRINCÍPIO E A CONJECTURA DE INVERSÃO

Algumas observações acerca das definições estabelecidas para as regras de dedução podem ser feitas. A primeira e mais clara é o fato de que com exceção da constante $\perp$ todas as constantes lógicas possuem regras de introdução e eliminação. Depois disso podemos ver que, em um certo sentido, as regras de introdução são o inverso das regras de eliminação, pois enquanto as regras de introdução agregam fórmulas, as de eliminação desagregam. Podemos ver isso de uma maneira precisa com auxilio da definição de Rota.

Rota: Uma rota *r* em uma derivação π é uma seqüência $A_{1,}$ ..., A_n tal que sejam asseguradas as seguintes condições:

1) A_1 é uma fórmula inicial que não é descarregada por E∨.
2) $A_{i,}$ para cada i < n, ou (I) é uma premissa menor de E→ e A_{i+1} é conectada lado-a-lado a A_i, ou (II) é uma premissa maior de aplicação de E∨ e A_{i+1} é uma Hipótese descarregada em π por aplicação dessa regra, ou (III) não é premissa menor de E→ e nem premissa maior de E∨ e A_{i+1} é a fórmula imediatamente abaixo de A_i.
3) A_n é ou a fórmula final de π ou uma premissa maior de aplicação da regra E∨ que não descarrega hipóteses.

Dizemos que uma regra R **desagrega** fórmulas numa derivação π se para toda aplicação de R em uma Rota "*r*" onde A_i é uma ocorrência de fórmula da forma ($A \rightarrow B$), ou ($A \vee B$), ou ($A \wedge B$), A_{i+1} é uma ocorrência de fórmula da forma *A*, ou da forma *B*.

Dizemos que uma regra R **agrega** fórmulas numa derivação π se para toda aplicação de R em uma Rota "*r*" onde A_i é é uma ocorrência de fórmula da forma *A*, ou da forma *B*, A_{i+1} é uma ocorrência de fórmula da forma ($A \rightarrow B$), ou ($A \vee B$), ou ($A \wedge B$).

Fica fácil notar que as regras de introdução agregam uma ocorrência de fórmula que já estava na rota a outra. E as regras de eliminação desagregam ocorrências de fórmulas de uma rota em suas sub-fórmulas[11].

A partir dessa observação notamos (de modo um pouco diferente do de Prawitz) que sempre que uma regra de introdução é usada em uma dedução já estão dadas, ao longo da árvore de dedução, as condições para deduzir as sub-fórmulas dessa nova fórmula. Se entendemos uma regra de eliminação como a desagregação das sub-fórmulas de uma determinada ocorrência de fórmula temos que toda regra de eliminação após uma regra de introdução é um passo redundante na dedução. O passo redundante é a introdução de uma fórmula que será em seguida eliminada. Assim, **o princípio de inversão** diz que em todos os casos onde uma determinada fórmula *B* é obtida por um processo redundante, como o citado acima, através de uma aplicação α de uma regra R, as condições suficientes para a dedução da

---

[11] Essa definição deixa claro que isso acontece inclusive na regra E∨ .

premissa maior (se houver) de α junto com a dedução da premissa menor de α já contém as condições suficientes para a dedução de *B*.

Abaixo os dois esquemas de dedução que seguem dos exemplos do próprio Prawitz e que podem ajudar a entender melhor o princípio:

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Gamma_1\\ \pi_1\\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma_2\\ \pi_2\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}\ \mathrm{I}\wedge}{B}\ \alpha\ \mathrm{E}\wedge \qquad\qquad \cfrac{\begin{matrix}\Gamma_1\\ \pi_1\\ A\end{matrix} \qquad \cfrac{\begin{matrix}[\mathrm{A}]^{(1)}\\ \pi_2\\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B}\ 1\ \mathrm{I}\rightarrow}{B}\ \alpha\ \mathrm{E}\rightarrow$$

A fórmula *B* obtida pela aplicação α das regras de inferência (dedução) já era, ou poderia ter sido, deduzida ao longo da árvore quando se estava provando (deduzindo) as premissas da aplicação da regra α. No caso da árvore da implicação nos bastaria prosseguir com a dedução de Γ_1 até *B* (uma vez que temos as informações “Γ_1 deduz *A*” e “*A* deduz *B*”), sem a necessidade de introduzir e eliminar a fórmula que tem a implicação como operador principal. Mais a frente o caso da disjunção aparecerá, quando estivermos mostrando uma maneira de nos livrarmos desses passos redundantes.

A universalidade desse princípio depende da prova da conjectura de inversão, que enuncia o seguinte: *Se* $\Gamma \vdash A$, *então existe uma dedução de A a partir de Γ na qual nenhuma ocorrência de fórmula é ao mesmo tempo conseqüência de uma aplicação de I-regra e premissa maior de uma aplicação de E-regra.* Contudo a conjectura não atinge todas as fórmulas redundantes de uma dedução π. Falaremos sobre isso mais adiante.

Como já tínhamos observado, a constante ⊥ não tem regras de eliminação e introdução. Isso faz com que o princípio de inversão não se aplique à regra $\perp_c$, e que a conjectura também não seja diretamente aplicado às deduções que fazem uso dessa regra. Uma das idéias mais imediatas para sanar esse problema seria acrescentar a negação como símbolo primitivo, excluindo a constante ⊥. As novas regras de introdução e eliminação para a negação seriam como as que aparecem abaixo:

$$\mathrm{I}\neg)\ \cfrac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]\\ \neg B\end{matrix}}{\neg A} \qquad\qquad \mathrm{E}\neg)\ \cfrac{\neg\neg A}{A}$$

Acontece que essas não são regras para as quais valham o princípio de inversão. Um exemplo disso é que um sistema de lógica clássica que tenha essas regras como primitivas vai ter ao menos uma prova que tem uma fórmula que é conseqüência de uma I-regra e premissa maior de uma E-regra e que é imprescindível para a prova. (Esta é a dedução da fórmula $A \lor \neg A$. Abaixo apresento a prova do modo que Prawitz o faz e destaco a fórmula problemática).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^{(1)}}{A \lor \neg A}\,\mathrm{I}\lor \qquad \neg(A \lor \neg A)^{(2)}}{\neg A}\,{}^{(1)}\,\mathrm{I}\neg}{A \lor \neg A}\,\mathrm{I}\lor \qquad \neg(A \lor \neg A)^{(2)}}{\neg\neg\boldsymbol{(A \lor \neg A)}}\,{}^{(2)}\,\mathrm{I}\neg}{A \lor \neg A}\,\mathrm{E}\neg$$

Com isso só temos a certeza de que não é a substituição da constante lógica $\perp$ pelo operador lógico ¬ que resolve o problema com a conjectura (princípio) de inversão e a regra $\perp_c$. O problema específico com essas regras não diz respeito a sua adaptação ou não ao princípio de inversão. Na verdade, o grande problema com elas, aqui, é a possibilidade de a regra $\perp_c$ gerar fórmulas de grau maior ou igual a 1, isto é, fórmulas moleculares, que podem na mesma dedução terem função de premissas maiores de E-regras. Isso quer dizer, que o problema específico com essa regra é, para Prawitz, a possibilidade delas gerarem as mesmas fórmulas redundantes mencionadas na descrição do princípio de inversão.

Podemos substituir o enunciado da conjectura de inversão usando a definição de fórmula máxima na tentativa de obter um teorema um pouco mais forte que o de inversão que dê conta do caso da regra $\perp_c$. Uma **fórmula máxima** é definida como a fórmula que surge em uma dedução π como conclusão de uma aplicação de I-regra ou $\perp$-regra, e é premissa maior de aplicação de E-regra. Isto é, fórmula máxima é especificamente o que vinhamos chamando informalmente de "fórmula redundante[12]". Assim, a conjectura de inversão pode ser substituído pela seguinte: *Se* $\Gamma \vdash A$*, então existe uma dedução de A a partir de Γ onde não existem fórmulas máximas.* Essa mudança do enunciado não resolve o problema que vínhamos tratando antes com respeito à conjectura (princípio) de inversão e a regra $\perp_c$, mas deixa mais claro o ponto em que queremos chegar. Temos para cada regra de inferência e

---

[12] E embora toda fórmula máxima seja redundante no contexto de uma dedução nem toda fórmula redundante em uma dedução é uma fórmula máxima. Importante também é observar que uma fórmula redundante não é o mesmo que uma fórmula inútil, no contexto de dedução natural certos rodeios encurtam em muito o tamanho de nossas demonstrações.

dedução uma forma de reduzir as fórmulas máximas, mas o problema com a regra $\bot_c$ é resolvido indiretamente com o uso de um teorema específico. Apresentaremos agora as reduções para cada regra de inferência, e em seguida o teorema que impossibilita a criação de fórmulas máximas a partir das aplicações de $\bot$-regra.

1.3.1 - Esquemas de Redução.

$\land$- redução. Então, a fórmula máxima F em π tem a forma $(A \land B)$ e é ao mesmo tempo conseqüência de uma aplicação de I$\land$ e premissa de uma aplicação de E$\land$. A dedução tem a seguinte forma:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_1 & \Sigma_2\\ A & B\end{array}}{A \land B}\,\mathrm{I}\land}{A}\,\mathrm{E}\land \\ \pi_3 \end{array}$$

Para eliminar a fórmula redundante podemos fazer a simples redução da dedução a outra do seguinte tipo:

$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ A \\ \pi_3 \end{array}$$

$\to$ - redução. Aqui a fórmula máxima F em π tem a forma $(A \to B)$ e é ao mesmo tempo conseqüência de uma aplicação de I$\to$ e premissa maior de uma aplicação de E$\to$. A dedução tem a forma abaixo:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \Sigma_2\\ B\end{array}}{A \to B}\,\mathrm{I}\to}{B}\,\mathrm{E}\to \\ \pi_3 \end{array}$$

Eliminamos a fórmula máxima da seguinte maneira:

$$\begin{matrix}\Sigma_1\\ [A]\\ \Sigma_2\\ B\\ \pi_3\end{matrix}$$

$\vee$ - redução. Aqui a fórmula máxima F em π tem a forma $(A \vee B)$e é ao mesmo tempo conseqüência e uma aplicação de I$\vee$ e premissa maior de uma aplicação de E$\vee$. A dedução tem a forma:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ A\end{matrix}}{A \vee B}\,\mathrm{I}\vee \qquad \begin{matrix}[A]\\ \Sigma_2\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \Sigma_3\\ C\end{matrix}}{\begin{matrix}C\\ \pi_4\end{matrix}}\,\mathrm{E}\vee$$

E aqui fazemos a seguinte redução da fórmula F:

$$\begin{matrix}\Sigma_1\\ [A]\\ \Sigma_2\\ C\\ \pi_4\end{matrix}$$

1.3.2 - Um tipo de ⊥-redução.

Como dissemos antes, eliminar uma fórmula máxima que é conseqüência de uma ⊥-regra não depende da aplicação de uma simples redução em uma dedução onde a regra seja aplicada, mas sim de um teorema específico. Uma solução para evitar o aparecimento de fórmulas máximas, que sejam conseqüência de aplicação da regra $\perp_c$, é provar que toda demonstração com aplicação dessa regra pode ser transformada em outra cujas conseqüências da aplicação de $\perp_c$ são apenas fórmulas atômicas. Essa é, de certo modo, também uma redução. Contudo, a aplicação dessa redução depende da prova de um teorema. Sabendo que a regra pode gerar fórmulas máximas com as três formas apresentadas anteriormente $\{(A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \vee B)\}$ temos que saber para cada caso como reduzir a dedução a uma outra onde as conseqüências de $\perp_c$ sejam atômicas.

(a) No caso em que as aplicações de $\bot_c$ têm como conseqüência fórmulas da forma $(B \wedge C)$.

A dedução original é do tipo:

$$\begin{array}{c}[\neg (B \wedge C)]\\ \Sigma\\ \dfrac{\bot}{B \wedge C}\\ \pi_1\end{array}$$

Mas podemos substitui-la por uma dedução da forma:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{B \wedge C}}{B}E\wedge \quad \overset{(2)}{\neg B}}{\bot}E\to}{[\neg (B \wedge C)]}I\to 1\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{B}\bot_c 2 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(3)}{B \wedge C}}{C}E\wedge \quad \overset{(4)}{\neg C}}{\bot}E\to}{[\neg (B \wedge C)]}I\to 3\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{C}\bot_c 4}{B \wedge C}I\wedge\\ \pi_1\end{array}$$

(b) No caso em que as aplicações de $\bot_c$ têm como conseqüência fórmulas da forma $(B \to C)$.

A dedução original é do tipo:

$$\begin{array}{c}[\neg (B \to C)]\\ \Sigma\\ \dfrac{\bot}{B \to C}\\ \pi_1\end{array}$$

Mas podemos substitui-la por uma dedução da forma:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{B} \quad \overset{(2)}{B \to C}}{C}E\to \quad \overset{(3)}{\neg C}}{\bot}E\to}{[\neg (B \to C)]}I\to 2\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{C}\bot_c 3}{B \to C}I\to 1\\ \pi_1\end{array}$$

(c) Os casos até agora bem sucedidos podem nos servir de motivação para esta tentativa de eliminar fórmulas máximas, contudo, vejamos agora uma tentativa de redução para o caso de uma fórmula com a forma $(A \vee B)$.

A dedução original é do tipo:

$$\begin{array}{c}[\neg (B \vee C)]\\ \Sigma \\ \dfrac{\bot}{B \vee C}\\ \pi_1\end{array}$$

Seguindo o padrão das substituições feitas acima teríamos para a disjunção:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{B \vee C} \qquad \dfrac{\overset{(2)}{[B]} \quad \overset{(3)}{\neg B}}{\bot}\,E\to \qquad \dfrac{\overset{(4)}{[C]} \quad \overset{(5)}{\neg C}}{\bot}\,E\to}{\bot}\,E\vee\ 2,4}{\neg (B \vee C)}\,I\to 1\\ \Sigma \\ \dfrac{\dfrac{\bot}{B}\,\bot_c\,(3 \text{ ou } 5)}{B \vee C}\\ \pi_1\end{array}$$

O problema claro com essa redução é que a árvore acima não é uma dedução. Isso pode ser observado pela cláusula 3 da definição de dedução e pela regra de dedução $\bot_c$. Aqui falharíamos em nossa tarefa de reduzir deduções com aplicação de $\bot_c$ àquelas que só possuem fórmulas atômicas como conseqüência da mesma regra evitando assim a possibilidade de criação de fórmulas máximas. Contudo, a disjunção não é necessária como símbolo primitivo em um sistema de lógica proposicional. A estratégia de Prawitz é substituir o sistema C de lógica clássica com o qual vínhamos trabalhando por um sistema C' que tem apenas a $\wedge$, a $\to$ e o $\bot$ como constantes lógicas primitivas. Isso assegura que não teremos uma regra E$\vee$ que nos crie o problema apresentado. Obviamente a retirada da disjunção não representa nenhum prejuízo já que qualquer fórmula da forma $(A \vee B)$ pode ser substituída por outra da forma $(A \to \bot) \to B$ $[\neg A \to B]$, ou mais prolixamente por uma da forma $((A \to \bot) \wedge (B \to \bot)) \to \bot$ $[\neg(\neg A \wedge \neg B)]$.

As transformações de dedução com uso da regra $\bot_c$ não são o suficiente para garantir que toda dedução, com o uso dessa regra, pode ser transformada em outra que tenha apenas fórmulas atômicas como conseqüência da aplicação de $\bot_c$. Assim sendo, para prova definitiva disso Prawitz apresenta o teorema 1, “teorema das conseqüências atômicas”[13].

Teorema das conseqüências atômicas: *Se* $\Gamma \vdash_{C'} A$*, então existe uma dedução de A a partir de Γ em C' na qual a conseqüência de toda aplicação da regra* $\bot_c$ *é atômica*.

---

[13] Como no corpo do trabalho aqui apresentado rotular o teorema como 1 pode causar ambigüidade vou me referir a ele muitas vezes como “teorema das conseqüências atômicas”.

Daremos uma prova desse teorema, e tão logo o fizermos voltaremos a comentar o teorema de inversão. Vamos supor que existe uma demonstração π de A a partir de Γ em C'. Vamos supor agora, que F é a fórmula de maior grau, obtida por aplicação de $\bot_c$, e nenhuma outra fórmula acima de F na árvore de π que seja conseqüência de $\bot_c$ é de mesmo grau. Vamos supor ainda, que esse grau, digamos d é maior que 0.

A prova se dá por indução no grau d da fórmula F. As formas possíveis para F são as expressas nas reduções 1.3.2 (a) ou (b), nesse caso, as transformações apresentadas lá podem ser aplicadas a essa fórmula.

Como base da nossa indução vamos admitir que $d = 1$. Nesse caso a fórmula F é da forma (i) $(A \wedge B)$ ou da forma (ii) $(A \rightarrow B)$ e tanto A quanto B são fórmulas atômicas. Para (i) aplicamos a transformação 1.3.2 a, e a fórmula F conseqüência de $\bot_c$ desaparece, em seguida na árvore teremos as fórmulas A e B como conseqüência da regra $\bot_c$ em nossa árvore, mas ambas têm grau 0. Para (ii) aplicamos a transformação 1.3.2 b, e a fórmula F conseqüência de $\bot_c$ desaparece, em seguida na árvore teremos a fórmula B como conseqüência da regra $\bot_c$ em nossa árvore e $g(B) = 0$.

Como Hipótese da indução vamos admitir que se para toda fórmula D, tal que $g(D) < d$, o teorema vale. E como passo indutivo, vamos admitir que $d > 1$. Nesse caso F é uma fórmula da forma (I) $(A \wedge B)$ ou da forma (II) $(A \rightarrow B)$, além disso, A e B não são fórmulas atômicas. Para o caso (I) notamos que $d = g(F) = (g(A) + g(B) + 1)$. Aplicando a transformação 1.3.2 a, a fórmula F conseqüência da regra $\bot_c$ desaparece, as fórmulas A e B passam a ser conclusão da regra $\bot_c$. Fica fácil ver que $g(A) < d$ e $g(B) < d$, portanto, vale o teorema para as duas fórmulas. Para o caso (II) aplicamos a transformação 1.3.2 b, e a fórmula F conseqüência da regra $\bot_c$ desaparece, a fórmula B passam a ser conclusão da regra $\bot_c$, mas como já vimos $g(B) < d$, portanto, vale o teorema.

1.3.3 - Teorema de Normalização e conjectura de Inversão

Podemos agora vislumbrar a possibilidade de uma árvore de fórmulas, que atenda os critérios necessários e suficientes para ser uma dedução, ou uma prova, e que não tenha fórmulas máximas, por termos feito todas as reduções ou transformações essenciais para isso. Chamaremos uma dedução desse tipo de **dedução normal**. Mais do que isso é importante para Prawitz aqui provar, que toda dedução pode ser transformada em uma correlata que tenha forma normal no sistema que tínhamos escolhido para trabalhar, o C'. Para isso Prawitz apresenta o seguinte teorema que vamos enunciar agora.

Teorema de Normalização

Vamos tentar refazer brevemente os passos que fizemos até agora para apresentar o teorema de Normalização. Se observarmos as definições dadas, notaremos que a conjectura de Inversão nada mais é do que um caso particular do teorema de Normalização. Vamos lembrar que a conjectura de inversão tem como enunciado: *Se* $\Gamma \vdash A$*, então existe uma dedução de A a partir de Γ na qual nenhuma ocorrência de fórmula é ao mesmo tempo conseqüência de uma aplicação de I-regra e premissa maior de uma aplicação de E-regra*. Demos à parte em destaque, acrescendo que a fórmula em questão também pode ser conseqüência de $\bot_c$-regra e premissa maior de E-regra, a definição de fórmula máxima. Assim temos uma nova exigência. Mudando o que queremos provar, podemos abreviar o enunciado desse novo teorema em: *Se* $\Gamma \vdash A$*, então existe uma dedução de A a partir de Γ onde não existem fórmulas máximas*. Definimos o trecho destacado como dedução normal. Então, em termos de nossas definições, o teorema de Normalização pode ser escrito assim: ***Se*** $\boldsymbol{\Gamma \vdash A}$***, então existe uma dedução normal de A a partir de Γ*** . Abaixo iniciaremos a prova desse teorema.

Depois do caminho que percorremos, uma prova do teorema de normalização não é complicada. Vamos admitir primeiro que exista uma dedução π em C' de *A* a partir de Γ onde toda aplicação de $\bot_c$ tenha como conseqüência fórmulas atômicas (Teorema das conseqüências atômicas). Nessa dedução arbitrária vamos escolher a fórmula máxima *F* que atenda as características de ser a fórmula máxima de maior grau (digamos que esse grau é $g(F) = d$), que tem todas ocorrências de fórmula acima de suas ocorrências conectadas lado-a-lado (e de *F*) de grau menor que d. Seja π' uma redução de *F* em π como definido em 1.3.1; a ∧ - redução e a → - redução podem gerar fórmulas máximas, mas de grau menor que d. Como existe um número finito n de fórmulas máximas em π, um número também finito de reduções eliminará todas as fórmulas máximas da dedução π transformando-a em π', que é claramente uma dedução normal. Apresentaremos de modo mais rigoroso uma prova de normalização no capítulo 5.

A prova desse teorema não tem relevância intrínseca. Não há de fato uma grande vantagem em se reduzir uma dedução a uma outra sem fórmulas máximas, quando na verdade a palavra 'redução' se aplica apenas à eliminação dessas fórmulas, mas é uma ironia quando pensamos na extensão que as deduções assumem após uma prova de normalização. Uma fórmula máxima pode dar concisão a uma dedução. Nesse caso, qual é o ganho de um teorema que elimina essas fórmulas? A resposta está nas conseqüências desse teorema. Adicionando a definição de um ramo em uma dedução, e observando as suas características, Prawitz nota um padrão de regularidade na posição das fórmulas nesse trecho (o ramo) de uma dedução normal. Essa observação rende um corolário importante e que dá sentido ao teorema da normalização, o princípio de sub-fórmula. Tal princípio é o suficiente para garantir uma prova de consistência para o sistema em que ele é demonstrado[14].

1.4 . NORMALIZAÇÃO EM LÓGICA MODAL

A lógica modal é uma das chamadas lógicas não-clássicas ampliativas. Os sistemas de lógica desse tipo são conhecidos assim por não serem concorrentes da lógica clássica e nem se oporem aos princípios dela. Há mais de uma forma de definir as lógicas modais, no entanto a maioria das definições é equivalente. Algumas delas dizem que os sistemas de lógica modal são sistemas fechados para conseqüência tautológica e apenas isso. Quando se trata de sistemas normais é comum dizer que são sistemas fechados para conseqüência tautológica, para a necessitação e contêm o axioma K (Apresentaremos tanto a regra quanto o axioma mais adiante). Nossa abordagem sintática, no entanto, não precisa dizer muito mais do que: os sistemas de Lógica Modal são sistemas que ampliam a linguagem de lógicas proposicionais (e de primeira ordem) acrescentando operadores modais e regras de inferência para eles. Os operadores modais servem como advérbios, isto é, modificam as sentenças na linguagem formal, assim como um verbo, um adjetivo ou um outro advérbio na linguagem natural. Em função da interpretação que damos aos nossos operadores modais, optando por aproximá-los a algum advérbio da linguagem natural, temos distintos tipos de lógica modal

---

[14] Embora a prova de consistência dada por Prawitz não dependa de tal princípio.

com aplicações variadas.

Podemos ampliar os sistemas de lógica M, I, C (sistemas “delimitados” em 1.2.2) e C' para transformá-los em sistemas modais. Para isso acrescentamos, além de uma nova constante lógica, novas cláusulas nas definições, da linguagem, dadas na seção 1.1. O conjunto de nossas constantes lógicas contará agora também com o operador $\Box$, que leremos como *necessariamente*. À definição de fórmula acrescentaremos a cláusula: 3) se *A* é uma fórmula $\Box A$ também é. Se “$\Box$” é a constante principal de uma fórmula dizemos que essa fórmula é modal. Devemos agora acrescentar regras de introdução e eliminação para essa nova constante, o que pode ser um problema, uma vez que existem diversos sistemas de lógica modal. Vamos aqui por conveniência nos restringir ao sistema S4, e como já está provada a normalização para C' usaremos este sistema como base proposicional. Nesse caso as novas regras de inferência apresentadas por Prawitz para o sistema que chamaremos de C'_{S4} são :

$$\text{I}\Box)\ \dfrac{A}{\Box A} \qquad\qquad\qquad \text{E}\Box)\ \dfrac{\Box A}{A}$$

Obviamente Prawitz impõe uma restrição nesta regra I$\Box$ que é: Se não há uma prova da premissa *A*, então há uma dedução de *A* que depende apenas de fórmulas modais. A regra de dedução equivalente à essa regra de inferência é $\langle\langle \Gamma, A\rangle, \langle \Gamma, \Box A\rangle\rangle$, onde toda fórmula em Γ (o conjunto de fórmulas que deduzem *A*) é uma fórmula modal. Prawitz, contudo, nota que a regra por ele estabelecida possibilita o aparecimento de fórmulas máximas em determinados tipos de prova, o que atravanca o trabalho de quem pretende provar o teorema de normalização a exemplo do que já vimos antes com o sistema C acrescido das regras para a negação. O exemplo de dedução problemática que usa esta primeira formulação das $\Box$ - regras apresentado por ele é o seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\Box A \land \Box B}{\Box B}\,\text{E}\land \qquad \dfrac{\dfrac{\Box A \land \Box B}{\Box A}\,\text{E}\land \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{[\Box A]}}{A}\,\text{E}\Box \qquad \dfrac{\overset{(2)}{[\Box B]}}{B}\,\text{E}\Box}{A \land B}\,\text{I}\land}{\Box (A \land B)}\,\text{I}\Box}{\Box B \to \Box (A \land B)}\,2\,\text{I}\to}{\boldsymbol{\Box A \to (\Box B \to \Box (A \land B))}}\,1\,\text{I}\to}{\Box B \to \Box (A \land B)}\,\text{E}\to}{\Box (A \land B)}\,\text{E}\to$$

A fórmula destacada acima é claramente uma fórmula máxima, e com as regras de inferência e dedução sugeridas acima é impossível nos livrarmos de uma dedução com uma fórmula desse tipo. Vemos isso de forma mais explícitas se tentarmos aplicar reduções a essa árvore a fim de normalizá-la. Aplicando a → - redução à árvore acima obtemos a seguinte dedução:

$$\dfrac{\dfrac{\Box A \land \Box B}{\Box A}\,E\land \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box A]^{1}}{A}\,E\Box \qquad \dfrac{\dfrac{\Box A \land \Box B}{\Box B}\,E\land}{B}\,E\Box}{A \land B}\,I\land}{\Box (A \land B)}\,I\Box}{\boldsymbol{\Box A \to \Box (A \land B)}}\,1\,I\to}{\Box (A \land B)}\,E\to$$

A dedução ainda tem uma fórmula máxima. Assim, mais uma vez aplicamos uma → -redução e obtemos a seguinte árvore:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box A \land \Box B}{\Box A}\,E\land}{A}\,E\Box \qquad \dfrac{\dfrac{\Box A \land \Box B}{\Box B}\,E\land}{B}\,E\Box}{A \land B}\,I\land}{\Box (A \land B)}\,I\Box$$

A árvore está claramente livre de fórmulas máximas. Contudo, essa não é mais uma dedução na versão apresentada do sistema C'_{S4}. A aplicação da regra I□ foi feita indevidamente, uma vez que a dedução da premissa da regra (*A* ∧ *B*) não depende apenas de fórmulas modais.

A solução oferecida pelo autor é expandir um pouco as restrições da regra I□ da seguinte maneira: a premissa *A*, no caso de essa não ser provada, pode ser também deduzida de fórmulas *essencialmente modais* como definido a seguir.

Definimos indutivamente uma **fórmula essencialmente modal** com respeito ao sistema S4 como segue abaixo.

1) □ *A* é uma fórmula essencialmente modal.

2) Se *A* e *B* são fórmulas essencialmente modais (*A* ∧ *B)* e (*A* ∨ *B)* também são.

3) ⊥ é uma fórmula essencialmente modal.

Com a mudança na restrição dessa regra de inferência, a regra de dedução continua a mesma, mas a restrição sobre as fórmulas de Γ é a de que elas sejam essencialmente modais, e não mais modais. Prawitz apresenta uma prova de equivalência entre os dois sistemas, mas tão logo o faz mostra um contra exemplo que prova que a restrição não é suficiente para evitar fórmulas máximas.

$$\dfrac{\dfrac{\Box A \wedge B}{\Box A}\,\mathrm{E}\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box A]^1}{\Box\Box A}\,\mathrm{I}\Box}{\Box A \to \Box\Box A}\,1\,\mathrm{I}\to}{\Box\Box A}\,\mathrm{E}\to$$

Com uma → - redução podemos notar um problema semelhante ao apresentado para a primeira versão de C'_{S4}:

$$\dfrac{\dfrac{\Box A \wedge B}{\Box A^1}\,\mathrm{E}\wedge}{\Box\Box A}\,\mathrm{I}\Box$$

A árvore sem fórmulas máximas não é uma dedução em C'_{S4}. Isso se dá porque a dedução da premissa de I□ depende da fórmula ($\Box A \wedge B$) que não é uma fórmula essencialmente modal.

A proposta dele, por fim, é uma terceira versão para o sistema C'_{S4} substituindo a definição de dedução que temos usado até agora por uma outra que ele havia apresentado no parágrafo 4º do primeiro capítulo, e acrescentando a ela uma cláusula especial para o caso de lógica modal. Nós, contudo, seguiremos outro caminho e tentaremos definir essa terceira versão dos sistemas de lógica modal a partir das definições já dadas anteriormente.

1.4.1 - Versão final do sistema C'_{S4}

Para deixar em evidência qual versão de C'_{S4} vai ser levada em conta no resto do capítulo, iremos apresentar o sistema nessa subseção. Aqui, ao invés de uma outra definição de dedução, apresentaremos somente uma restrição na regra I□, como a apresentada em Medeiros (Medeiros, 2006), que já descreve bem a terceira versão do sistema C'_{S4} de Prawitz.

Desse modo C'_{S4}, é o sistema de dedução natural em lógica modal que tem além das regras de inferência próprias e dedução I, E-∧ e I, E-→ a regra de inferência:

$$\text{E}\Box)\ \frac{\Box A}{A}$$

E a regra de inferência :

$$\text{I}\Box)\ \frac{A}{\Box A}$$

com a restrição: Se a premissa *A* de regra I□ é dependente de uma hipótese *B*, então existe uma fórmula essencialmente modal *C* (no fio de *B* até *A*) tal que *B* está acima ou é igual a *C*, e C depende apenas das hipóteses das quais A depende.

1.4.2 - Procedimentos para a normalização do sistema C'$_{S4}$

Embora não apresentemos essa prova como Prawitz sugere (até mesmo por ser uma prova impossível, como veremos mais adiante) apresentamos os detalhes que o autor diz serem necessários para concluirmos essa prova. Seriam eles tão somente:

(i) Uma redução para as fórmulas máximas da forma □ *A:*

$$\pi = \begin{array}{c} \Sigma \\ \dfrac{\dfrac{A}{\Box A}\ I\,\Box}{A}\ \text{E}\,\Box \\ \pi_1 \end{array} \qquad \pi' = \begin{array}{c} \Sigma \\ A \\ \pi_1 \end{array} \qquad \text{e}$$

(ii) A possibilidade de diminuir o grau das fórmulas que são conseqüência de $\perp_c$ e têm a forma □ *A*.

Para resolver este problema, Prawitz diz que se deve proceder como para as lógicas de segunda ordem, e isso quer dizer que ele pensa em uma transformação do tipo:

$$\pi \;=\; \begin{array}{c} [\neg \Box A]^i \\ \Sigma_1 \\ \underline{\quad \perp \quad}\; i\ \perp_c \\ \underline{\;\Box A\;}\; \mathrm{E}\ \Box \\ A \\ \Sigma_2 \end{array} \qquad\qquad \pi' = \begin{array}{c} \underline{[\Box A]^i}\; \mathrm{E}\ \Box \\ \underline{\;A \qquad\qquad [\neg A]^j\;}\; \mathrm{E} \rightarrow \\ \underline{\quad \perp \quad}\; i\ \mathrm{I} \rightarrow \\ \neg \Box A \\ \Sigma_1 \\ \underline{\;\perp\;}\; j\ \perp_c \\ A \\ \Sigma_2 \end{array}$$

Assim, Prawitz termina o terceiro parágrafo do capítulo 6 dizendo que isso basta para a normalização de C'_{S4}, seu teorema da sub-fórmula e a prova de consistência. No próximo capítulo irei expor a partir do trabalho de Medeiros (Medeiros, 2006) a razão pela qual a redução apresentada por Prawitz não é suficiente para garantir a detenção de uma prova de normalização nesse sistema, e que solução Medeiros propõe para esse problema.

2 O PROBLEMA NA NORMALIZAÇÃO DE C'$_{S4}$ E UMA POSSÍVEL RESOLUÇÃO PARA ELE

2.1 . UMA TRANSFORMAÇÃO PROBLEMÁTICA

Em trabalho publicado no *The Journal of Symbolic Logic*, em Setembro de 2006, *A new S4 classical modal logic in natural deduction*, Medeiros apresenta um contra-exemplo onde fica claro que a normalização para a terceira versão de S4 em dedução natural apresentada por Prawitz para o sistema C'$_{S4}$ não funciona[15]. O contra-exemplo demonstra que há uma dedução que ao ser transformada pelo esquema apresentado em 1.4.2 (ii) deixa de ser uma dedução. Vejamos então o contra-exemplo:

Por 1.4.2 (ii) a dedução π :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\Box A]^i \qquad \neg\Box A \to B}{B}\,E\to \qquad \neg B}{\bot}\,E\to}{\Box A}\,i\ \bot_c}{A}\,E\,\Box}{C \to A}\,I\to}{\Box(C \to A)}\,I\,\Box$$

Seria transformada na árvore π':

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box A]^i}{A}\,E\,\Box \qquad [\neg A]^j}{\bot}\,E\to}{\neg\Box A}\,i\ I\to \qquad \neg\Box \boldsymbol{A \to B}}{B}\,E\to\ (B) \qquad \neg \boldsymbol{B}}{\bot}\,E\to\ (B)}{A}\,r\,,\,j\ \bot_c\ \ (C)}{\boldsymbol{C \to A}}\,I\to}{\Box(C \to A)}\,I\,\Box\ \ (A)$$

As letras entre parêntese destacam que fórmulas são as mencionadas na restrição apresentada em 1.4.1 e r é uma aplicação da regra $\bot_c$.

Sobre a árvore π' , Medeiros diz: "Não é difícil notar que a fórmula ⊥, que ocorrem em π' como premissa da regra r, é uma fórmula essencialmente modal e depende da hipótese ¬A, enquanto a premissa (C → A) da última aplicação de (I□) em π' não depende[16]."(Medeiros

---

[15] Na verdade o contra-exemplo se aplica também a outros sistemas apresentados por Prawitz em *Natural deduction* como C$_{S4}$, I$_{S4}$, M$_{S4}$

[16] *"It is not difficult to see that the formula ⊥, which occurs in π' as the premise of the rule r, is an essentially*

2006, p. 801). E seria isso que firmaria o contra-exemplo para Medeiros. Na verdade o contra-exemplo procede por uma outra razão. Para contrariar a restrição apresentada em 1.4.1 é necessária uma prova negativa, isto é, uma prova de não existência[17] da fórmula (C) que assuma as condições descritas na restrição. O fato é que a árvore apresentada nos serve muito bem a esse fim. Tomemos como exemplo o caso do fio que tem a fórmula inicial $\neg B$. Nesse caso temos que a fórmula $(C \to A)$ no fio depende da fórmula $\neg B$. Entre essas duas fórmulas no fio há apenas uma fórmula essencialmente modal, qual seja, a fórmula $\bot$. O problema é que esta fórmula depende de $\neg A$, como se pode ver, assim não atende a condição de depender apenas das fórmulas das quais $(C \to A)$ depende. Se $\bot$ era a única fórmula essencialmente modal do fio e não atende às condições da restrição da regra, então não há a fórmula exigida na restrição, e isso prova que a árvore transformada obviamente não é uma dedução em C'_{S4}.

2.2 . UM NOVO SISTEMA S4 CLÁSSICO EM DEDUÇÃO NATURAL.

O sistema apresentado por Medeiros, nomeado NS4, comporta as definições apresentadas para fórmula, sub-fórmula, grau de uma fórmula e árvore de fórmulas. As **regras de inferência** são apresentadas abaixo:

$$(\mathrm{I}\to)\ \ \dfrac{\begin{array}{c}[A]^{i}\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \to B}\ i$$

$$(\mathrm{I}\wedge)\ \ \dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$$

$$(\mathrm{I}\vee)\ \ \dfrac{A}{A \vee B} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}$$

$$(\mathrm{E}\to)\ \ \dfrac{A \qquad A \to B}{B}$$

$$(\mathrm{E}\wedge)\ \ \dfrac{A \wedge B}{A} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}$$

$$(\mathrm{E}\vee)\ \ \dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A]^{i}\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]^{j}\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\ i, j$$

---

modal formula and depends on the assumption $\neg A$, whereas the premise $(C \to A)$ of the last aplication of (I□) in π' does not depend on it.”

[17] Na verdade, de modo mais geral, também pode ser encarada como uma prova positiva atestando a existência de uma árvore que não tem a fórmula essencialmente modal (C) a qual é exigida na restrição da regra I□.

$$(\bot_c)\ \dfrac{\begin{array}{c}[A \rightarrow \bot]^{i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \bot\end{array}}{A}\ i \qquad\qquad (\mathrm{E}\,\Box)\ \dfrac{\Box A}{A}$$

$$(\mathrm{I}\Box)\ \dfrac{\Box B_1 \ldots \Box B_n \qquad \begin{array}{c}[\Box B_1]^{i_1} \ldots [\Box B_n]^{i_n} \\ \cdot \\ \cdot \\ A\end{array}}{\Box A}\ i_1 \ldots i_n$$

Restrição na regra (I□). Toda ocorrência de hipóteses na classe $[\Box B_k]^{i}_{k}$, $1 \leq k \leq n$, deve ser descarregada pela aplicação da regra. Além disso a premissa *A* não deve depender de qualquer hipótese que não seja daquelas que ocorrem na classe de hipóteses em questão.

A nova regra (I□) pode parecer confusa inicialmente, mas um olhar mais detalhado pode revelar algumas intuições implicitamente presentes. Em primeiro lugar, podemos observar que a estrutura da regra não foge às pretensões da regra proposta por Prawitz. Isso porque tudo que a regra nos cobra é que a fórmula na qual será introduzida o operador □ seja deduzida somente de fórmulas modais. Em segundo lugar, notamos que tendo fórmulas já assumidas (as premissas maiores da regra) tomá-las como hipóteses não trás prejuízo. Nesse sentido a regra lembra um pouco o caso da regra E∨ onde existe uma dedução para ambos os disjuntos. Em terceiro lugar, podemos pensar em um caso onde onde a restrição da regra fosse burlada, e assim entenderemos melhor o sentido implícito dela. Vejamos primeiro uma árvore formal Ω onde a restrição não é respeitada:

$$\Omega \qquad \dfrac{\Box (A \rightarrow B) \qquad \dfrac{\dfrac{\Box (A \rightarrow \neg B)^{1}}{A \rightarrow \neg B}\ \mathrm{E}\Box \qquad A^{2}}{\neg B}\ \mathrm{E}{\rightarrow}}{\Box \neg B}\ 1\ \mathrm{I}\Box$$

Façamos isso agora informalmente com um argumento em linguagem natural. Tomemos como necessária a sentença:

1) “ Se o rio corresse da jusante para a montante as leis físicas não valeriam.”
$(A \rightarrow \neg B)$

E consideremos a possibilidade esdruxula, porém não contraditória, de que uma intervenção mística torne verdadeira em certo lugar do mundo, em certo momento, a sentença:

2) “ O rio corre da jusante para a montante.” (*A*)

Seguindo a dedução formal feita em Ω obtemos como conclusão a seguinte afirmação:

3) É necessária a sentença “as leis da física não valem.” ($\Box\neg B$)

Notemos que a proposição 3 que é conclusão do argumento é absurda, as leis físicas podem continuar valendo mesmo com a exceção, e assim a proposição 3 não é necessária. O problema com o argumento é que uma das premissas não é modal, e a conclusão o é. O efeito dessa falácia é bem próximo do efeito da falha na restrição da regra (I□) em Ω, o que pode nos dar mais uma idéia do sentido da última. Dada essa breve explanação voltemos às definições.

A definição de dedução é apresentada a seguir tomando por base outro trabalho de Medeiros (Medeiros, 2002 pg 42 e 43). É importante apresentar essa definição uma vez que à diferença da de Prawitz esta nova não faz distinção entre dois tipos de regras (inferência e dedução), e além disso traz o caso da nova regra I□.

Definição 2.1. π é uma **dedução** em NS4 de uma fórmula *A* a partir de um conjunto Γ de fórmulas, eventualmente vazio se, e somente se:

i) π é *A*

Nesse caso, dizemos que *A* é deduzível de *A* dependendo apenas do conjunto {*A*}.

ii) π é $\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \pi_1 & \pi_2\\ B & C\end{matrix}}{A}\,r$ onde, $\begin{matrix}\Gamma_1\\ \pi_1\\ B\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\Gamma_2\\ \pi_2\\ C\end{matrix}$ são deduções, r é uma aplicação de E→, I∧, E∧, I∨,

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, e π_1 ou π_2 é possivelmente vazia;

$\Gamma\ [B]^i \qquad \Gamma\ [B]$

iii) π é $\cfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ C\end{array}}{A}\; r,i$ onde, $\begin{array}{c}\pi_1\\ C\end{array}$ é uma dedução, r é uma aplicação de I → ou $\bot_c$ e [*B*] é o conjunto, possivelmente vazio, das hipóteses descarregadas em função de r;

iv) π é $\cfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \pi_1\\ B \vee C\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma_2\,[B]^i\\ \pi_2\\ A\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma_3\,[C]^j\\ \pi_3\\ A\end{array}}{A}\; r, i, j$ onde, $\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \pi_1\\ B \vee C\end{array}$, $\begin{array}{c}\Gamma_2\,[B]\\ \pi_2\\ A\end{array}$ e $\begin{array}{c}\Gamma_3\,[C]\\ \pi_3\\ A\end{array}$ são deduções, r é a regra de E∨ [*B*] e [*C*] são conjuntos das hipóteses descarregadas em função de r e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

v) π é $\cfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \pi_1\\ \Box A\end{array}}{A}\; r$ onde, $\begin{array}{c}\Gamma\\ \pi_1\\ \Box A\end{array}$ é uma dedução e r é uma aplicação de E□.

vi) π é $\cfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \pi_1\\ \Box B_1\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \pi_2\\ \Box B_2\end{array}\quad \begin{array}{c}\ldots\;\Gamma_n\\ \pi_n\\ \Box B_n\end{array}\qquad \begin{array}{c}[\Box B_1\;\; \Box B_2 \ldots \Box B_n]^k\\ \pi_{n+1}\\ C\end{array}}{\Box C}\; r, k$ onde, $\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \pi_1\\ \Box B_1\end{array}$ a $\begin{array}{c}[\Box B_1\;\; \Box B_2 \ldots \Box B_n]\\ \pi_{n+1}\\ C\end{array}$ são deduções, r é uma aplicação de I□, $\{\Box B_1, \Box B_2, \ldots, \Box B_n\}$ é o conjunto das hipóteses descarregadas em função de r e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \ldots \Gamma_n$.

As definições abaixo apresentadas estão no artigo de Medeiros (Medeiros, 2006)

Definição 2.2. As premissas ($A \to B$) da regra E→, ($A \wedge$ B) de E∧, ($A \vee B$) de E∨, □ A de E□ e as premissas $\Box B_1 \ldots \Box B_n$ da regra I□ são chamadas de premissas maiores, e as outras (no caso de haver alguma), menores.

Definição 2.3. Um **ramo** em uma dedução π em NS4 é uma seqüência $A_1,\ldots, A_n$ de ocorrências de fórmulas tal que :

(i) A_1 é uma hipótese que não é descarregada por aplicação de E∨ e nem I□ ;

(ii) Para todo i < n, A_i não é uma premissa menor de E→ e,

a) Se A_i não é uma premissa maior de E∨ nem de I□, então A_{i+1} é a fórmula que ocorre imediatamente abaixo de A_i;

b) Se A_i é uma premissa maior de E∨ ou de I□, então A_{i+1} é qualquer hipótese descarregada pela aplicação de E∨ ou I□ em questão, que tenha a mesma forma de A_i.

(iii) A_n é uma premissa menor de E→ , a fórmula final de uma dedução, ou ainda uma premissa maior de aplicação de E∨ que não descarrega qualquer hipótese.

Definição 2.4. Um **segmento** em uma dedução é uma seqüência $A_1,..., A_n$ de fórmula da mesma forma em um ramo onde A_1 não é a conclusão de uma aplicação de E∨ nem uma hipótese descarregada através de aplicação de I□, e A_n não é uma premissa menor de E∨ nem uma premissa maior de I□.

Definição 2.5. O **comprimento de um segmento** l(s) é o número de fórmulas nesse segmento.

Definição 2.6. Um **segmento maximal** em uma dedução é um segmento $A_1,..., A_n$ onde A_1 é a conclusão de uma aplicação de uma I-regra ou $\bot_c$, e A_n é premissa maior de uma aplicação de regra de eliminação.

Definição 2.7. Uma **Fórmula maximal** é um segmento maximal de comprimento 1, e uma premissa é chamada maximal se pertence a um segmento maximal.

Definição 2.8. Uma fórmula A é uma **fórmula trivial** se A é a conclusão de uma aplicação de $\bot_c$ e a premissa menor de uma aplicação de E→ cuja premissa maior é $\neg A$.

Definição 2.9. Uma **dedução simplificada** é uma dedução que tem as premissas menores de todas as aplicações de E∨ da forma $\bot$.

Definição 2.10. O **grau de um segmento** é o grau da fórmula que pertence a esse segmento.

Definição 2.11. O **grau de uma dedução** π, $g(\pi)$, é o maior grau entre os segmentos maximais de π. Se π não tem segmentos maximais então $g(\pi) = 0$.

Definição 2.12[18]. O **grau máximo entre deduções** max $\{g(\pi_1), ...,g(\pi_n)\}$ é o grau da dedução de maior grau entre as deduções $\pi_1, ..., \pi_n$.

Definição 2.13. O **índice** de uma dedução π é $I(\pi) = \langle d, s\rangle$, onde '$d$' é o grau da

---

[18] Tanto esta quanto a definição 2.14 são auxiliares, e não aparecem no trabalho de Medeiros.

dedução π (d = g(π)) e '*s*' é a soma dos comprimentos dos segmentos maximais de π cujo grau é *d*. Se π não tem segmentos maximais então $I(\pi) = \langle 0, 0\rangle$.

Definição 2.14.. Se $I(\pi) = \langle d, s\rangle$ e $I(\pi') = \langle d', s'\rangle$ então, $I(\pi') < I(\pi)$ se e somente se ou $d' < d$ ou $d' = d$ e $s' < s$.

Notação 2.14.1. Uma subderivação em uma dedução π é qualquer subárvore Σ de π tal que $c(\Sigma) < c(\pi)$. A partir daqui usaremos a letra grega Σ com subscritos para identificar subderivações de uma dedução π.

Definição 2.15. Uma **dedução crítica** em NS4 é uma dedução π tal que a última inferência de π tem uma premissa maximal de grau $g(\pi)$, e para toda subderivação Σ de π, $g(\Sigma) < g(\pi)$.

Definição 2.16. Uma dedução π é uma **dedução normal** se π não tem segmentos maximais, isso é, $I(\pi) = \langle 0, 0\rangle$.

2.3 . NORMALIZAÇÃO EM NS4

A partir dessa seção apresentaremos os passos preliminares e a prova de normalização dada por Medeiros para o sistema NS4. Antes da prova, a autora faz duas observações importantes, uma é sobre a equivalência entre seu sistema e o sistema S4 axiomático conhecido na literatura, esta prova aparece no capítulo 3 como um dos nossos resultados, outra é a observação de que NS4 satisfaz a propriedade da substituição. O teorema que demonstra isso é apresentado abaixo:

Teorema 2.17.(Teorema da substituição) Sejam $\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array}$ e $\begin{array}{c}{[A]}\\ \pi_2\end{array}$ deduções em NS4 tal que a fórmula A em π_2 é uma hipótese que não é descarregada. Se π é $\begin{array}{c}\pi_1\\ {[A]}\\ \pi_2\end{array}$, então π é uma dedução em NS4 e $g(\pi) \leq \max\{g(A), g(\pi_1), g(\pi_2)\}$.

Faremos a demonstração por indução no comprimento de π_2, $c(\pi_2)$. Dividiremos a prova por casos de acordo com as possibilidades da última aplicação de regra em π_2.

Base: $c(\pi_2) = 1$, isto é, π_2 é A.

Esse caso segue de modo trivial, uma vez que π vai ser igual a $\begin{array}{c}\pi_1\\ A\end{array}$, que nós já admitimos que é uma dedução. Além disso, $g(\pi) = g(\pi_1)$.

Passo indutivo: $c(\pi_2) > 1$.

H.I : O teorema vale para todo π_n tal que $c(\pi_n) < c(\pi_2)$.

Caso 1: A última aplicação de regra de inferência em π_2 é E→ e π_2 tem uma das formas abaixo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}{[A]}\\ \pi_3\\ B\end{array}\quad\begin{array}{c}\Gamma_4\\ \pi_4\\ B\to C\end{array}}{C}\,r \quad \text{ou} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \pi_3\\ B\end{array}\quad\begin{array}{c}{[A]}\\ \pi_4\\ B\to C\end{array}}{C}\,r$$

Façamos para o caso da esquerda, o outro segue de modo análogo. Pela definição de dedução, π_3 é uma dedução, e $c(\pi_3) < c(\pi_2)$, logo vale a hipótese de indução, temos assim que $\begin{array}{c}\pi_1\\ A\\ \pi_3\\ B\end{array}$ é uma dedução, digamos, π' e $g(\pi') \leq \max\{g(A), g(\pi_1), g(\pi_3)\}$, e já sabemos que $g(\pi_3) \leq g(\pi_2)$.

Pela definição de dedução π_4 é uma dedução, além disso $g(\pi_4) \leq g(\pi_2)$ e como $\begin{array}{c}\pi_1\\ A\\ \pi_3\\ B\end{array}$ e $\begin{array}{c}\Gamma_4\\ \pi_4\\ B\to C\end{array}$ são deduções a árvore abaixo, que é π, também é uma dedução.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\\ \pi_3\\ B\end{array}\quad\begin{array}{c}\Gamma_4\\ \pi_4\\ B\to C\end{array}}{C}\,r$$

Fica fácil notar que, se A é uma premissa maximal, o qual é o pior dos casos, então $g(\pi) \leq \max\{g(A), g(\pi_1), g(\pi_2)\}$. A prova é análoga para os casos com as regras $I\wedge$, $E\wedge$, e $I\vee$.

Caso 2: A última aplicação de regra de inferência em π_2 é I→, e π_2 tem a forma

$$\begin{array}{c} [A]\ [B]^{i} \\ \pi_3 \\ \dfrac{C}{B \to C}\ \text{r, i.} \end{array}$$

Pela definição de dedução $\begin{array}{c} [A]\ [B] \\ \pi_3 \\ C \end{array}$ é uma dedução e c (π_3) < c (π_2), assim vale a H.I e temos que $\pi' = \begin{array}{c} \pi_1 \\ [\mathrm{A}]\ [B] \\ \pi_3 \\ C \end{array}$ também é uma dedução. Pela cláusula (iii) da definição de dedução $\begin{array}{c} \pi_1 \\ [\mathrm{A}]\ [B]^{i} \\ \pi_3 \\ \dfrac{C}{B \to C}\ \text{r, i} \end{array}$ pode ser obtida como a dedução π. Como no caso anterior $g(\pi') \leq \max\{g(A), g(\pi_1), g(\pi_3)\}$ e $g(\pi_3) \leq g(\pi_2)$, assim fica fácil ver que $g(\pi) \leq \max\{g(A), g(\pi_1), g(\pi_2)\}$. A prova é análoga para o caso da regra $\perp_c$.

Caso 3: A última aplicação de regra de inferência é I∨ e π_2 é da forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c} [A] \\ \pi_3 \\ B \vee C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B]^{i} \\ \pi_4 \\ D \end{array} \quad \begin{array}{c} [C]^{j} \\ \pi_5 \\ D \end{array}}{D}\ \text{r, i, j}$$

Pela definição de dedução $\begin{array}{c} [A] \\ \pi_3 \\ B \vee C \end{array}$ é uma dedução e c (π_3) < c (π_2), assim vale a H.I para π_3 e temos $\begin{array}{c} \pi_1 \\ [A] \\ \pi_3 \\ A \vee B \end{array}$ que é π', além disso, $g(\pi') \leq \max\{g(A), g(\pi_1), g(\pi_3)\}$. Pela definição 1 temos que

$$\dfrac{\begin{array}{c} \pi_1 \\ [A] \\ \pi_3 \\ A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} [B]^{i} \\ \pi_4 \\ D \end{array} \quad \begin{array}{c} [C]^{j} \\ \pi_5 \\ D \end{array}}{D}\ \text{r, i, j}$$

é a dedução π, e como $g(\pi_3) \leq g(\pi_2)$, fica claro que $g(\pi) \leq \max\{g(A), g(\pi_1), g(\pi_2)\}$.

Caso 4: A última aplicação de regra de inferência é E□ e π_2 é da forma $\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \pi_3\\ \Box B\end{matrix}}{B}$.

Pela definição de dedução $\begin{matrix}[A]\\ \pi_3\\ \Box B\end{matrix}$ é uma dedução, como c(π_3) < c(π_2) vale a H.I, assim temos que $\begin{matrix}\pi_1\\ [A]\\ \pi_3\\ \Box B\end{matrix}$ é a dedução π' e g(π') ≤ max {g(*A*), g(π_1), g(π_3)}. A definição 1 garante que $\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ [A]\\ \pi_3\\ \Box B\end{matrix}}{B}\,r$ é a dedução π e como g(π_3) ≤ g(π_2) temos que g(π) ≤ max{g(*A*), g(π_1), g(π_2)}.

Caso 5 : I□ é a última aplicação de regra de inferência *A* é da forma □ *B* e π_2 é da forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\Box B]\ \dots\\ \pi_3\\ \Box C_3\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Gamma_n\\ \pi_n\\ \Box C_n\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[\Box C_3 \dots \Box C_n]^k\\ \pi_{n+1}\\ D\end{matrix}}{\Box D}\ r, k$$

Pela definição de dedução $\begin{matrix}[\Box B]\\ \pi_3\\ \Box C_3\end{matrix}$ é uma dedução, e c (π_3) < c (π_2), assim vale H.I e $\begin{matrix}\pi_1\\ [\Box B]\\ \pi_3\\ \Box C_3\end{matrix}$ é a dedução π', além disso, g(π') ≤ max {g(*A*), g(π_1), g(π_3)}. Mais uma vez pela definição de dedução temos que:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ [\Box B]\ \dots\\ \pi_3\\ \Box C_3\end{matrix}\quad \begin{matrix}\\ \Gamma_n\\ \pi_n\\ \Box C_n\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\\ [\Box C_3 \dots \Box C_n]^k\ .\\ \pi_{n+1}\\ D\end{matrix}}{\Box D}\ r, k$$

é a dedução π, e como já sabemos que g(π_3) ≤ g(π_2) temos que g(π) ≤ max{g(*A*), g(π_1), g(π_2)}. ■

Lema 2.18. Se a fórmula ¬*A* é uma hipótese em uma dedução simplificada π, então π pode ser transformada em uma derivação π' tal que ¬*A* é uma premissa maior de uma aplicação de E→ e não aparece em π' nenhum segmento maximal novo ou fórmula trivial. Além disso, π' não deixa de ser uma derivação simplificada.

Na prova, Medeiros propõe que nos casos em que a fórmula inicial ¬*A* já não seja premissa de E→ em π nós façamos a seguinte adaptação:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{[A]^{i} \qquad \neg A}{\perp}\,E\rightarrow}{\neg A}\,i, I\rightarrow \\ \pi \end{array}$$

Lema 2.19. (lema da simplificação) Se π é uma derivação de *C* a partir Γ em NS4, então π pode ser transformada em uma derivação simplificada de *C* a partir de Γ.

Prova. Seja m(π) o número de aplicações de E∨ em π que tem premissas diferentes de ⊥. A prova é por indução em m(π).

$$\text{A dedução } \pi : \quad \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A \vee B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A]^{i}\\ \Sigma_2\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]^{j}\\ \Sigma_3\\ C\end{array}}{C}\,i, j \\ \Sigma_4 \end{array}$$

$$\text{é transformada em } \pi' : \quad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A \vee B\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^{i}\\ \Sigma_2\\ C\end{array} \quad [\neg C]^{k}}{\perp}\,E\rightarrow \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[B]^{j}\\ \Sigma_3\\ C\end{array} \quad [\neg C]^{k}}{\perp}\,E\rightarrow}{\perp}\,i, j\ E\vee}{C}\,k\ \perp_c \\ \Sigma_4 \end{array}$$

Por um número de transformações igual a m(π) teremos uma dedução simplificada[19].

Lema 2.20. Se π é uma dedução simplificada de *C* a partir de Γ, então π pode ser transformada em uma dedução simplificada sem fórmulas triviais tal que I(π') ≤ I(π).

É uma prova por indução no número de fórmulas triviais de π. Medeiros sugere a seguinte transformação de π para π_1:

$$\pi = \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^{i}\\ \Sigma_1\\ \perp\end{array}}{A}\,i\ \perp_c \qquad \neg A^{*}}{\perp}\,r\ E\rightarrow \\ \Sigma_2 \\ C \end{array} \qquad\qquad \pi_1 = \begin{array}{c} [\neg A] \\ \Sigma_1 \\ \perp \\ \Sigma_2 \\ C \end{array}$$

Podemos observar que as hipóteses da classe [¬*A*] em π_1 são descarregadas onde a hipótese $\neg A^{*}$ seria descarregada. Vemos então que π_1 tem uma quantidade de fórmulas triviais menor que π, que continua sendo uma dedução simplificada e I(π_1) ≤ I(π). A hipótese de

---

[19] É possível que a fórmula *C* (conseqüência de $\perp_c$) se torne uma fórmula máxima nesse passo, por isso ele é essencial antes dos demais, se fosse feito após os outros as fórmulas máximas reapareceriam na dedução.

indução assegura que existe uma dedução simplificada π' sem fórmulas triviais de *C* a partir de Γ tal que I(π') ≤ I(π).

Lema 2.21. (Lema crítico) Se π, é uma dedução cítica simplificada de *C* a partir de Γ em NS4, então π pode ser transformada em uma dedução simplificada π' tal que I(π') < I(π).

Prova. Sejam I(π) = ⟨d, s⟩, r a última inferência de π e F a premissa maximal de r tal que g(F) = *d*. A prova mostra que a dedução π pode ser transformada em uma dedução π' tal que I(π') < I(π).

Os dois casos possíveis para o aparecimento da fórmula F são considerados na prova. No Caso 1 F é a conclusão de uma aplicação de uma I-regra, e no Caso 2 F é conseqüência de uma aplicação da regra $\bot_c$.

Caso 1. F é a conclusão de uma aplicação de uma regra de introdução.

(1.1). r é (E→) e F é (*A* → *C*)

Esse caso é igual à →- redução apresentado em 1.3.1 com a diferença que a redução é feita na última premissa de π, uma vez que π é uma dedução crítica.

$$\pi = \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]^i\\ \Sigma_2\\ C\end{matrix}}{A \to C}\; i, I\!\to}{C}\;(r)\; E\!\to \qquad\qquad \pi' = \begin{matrix}\Sigma_1\\ [A]\\ \Sigma_2\\ C\end{matrix}$$

A transformação nos garante que max{g(Σ_1), g(Σ_2), g(*A*)} < g (π). Isso é garantido, pois, como já dissemos, π é uma dedução crítica, ou seja, g(*A* → *C*) = g(π), além disso as únicas fórmulas (ou segmentos) máximas(os) que pode surgir são da fórma *A*, e g(*A*) < g(*A* → *C*). Pelo teorema 2.17 g(π') ≤ max{g(Σ_1), g(Σ_2), g(*A*)}, conseqüentemente I(π') < I(π).

(1.2) r é (E□) e F é □ *C*

Nesse caso π é uma dedução do tipo:

$$\pi = \underline{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Box A_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_n\\ \Box A_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\Box A_1]^{i}_{1} \ldots [\Box A_n]^{i}_{n}\\ \Sigma_{n+1}\\ C\end{matrix}}\; i_1,\ldots, i_n\; I\,\Box$$

$$\dfrac{\Box\, C}{C}\; r$$

Medeiros diz que uma dedução assim pode ser transformada em uma π' do tipo:

$$\pi' = \begin{array}{c} \underline{\ \Sigma_1\ }\ \ldots\ \underline{\ \Sigma_n\ } \\ [\Box A_1]^{i}_{1} \ldots [\Box A_n]^{i}_{n} \\ \Sigma_{n+1} \\ C \end{array}$$

Aqui a transformação não gera nenhum segmento maximal que já não existisse em π, basta notar que a mudança feita na árvore tem efeito apenas nas fórmulas da forma $\Box A_i$. Se cada fórmula dessa forma pertencia a segmentos maximais de grau *d,* e se a soma dos comprimentos desses segmentos de grau *d* era *s*, então cada segmento (que tinha grau *d* em π) continuará em π' com grau *d* e a soma do comprimento desses segmentos será *s* – 1. Além disso, como π é uma dedução crítica, (para toda subderivação Σ de π g(Σ) < g(π)) temos $\max\{g(\Box A_1), ..., g(\Box A_n), g(\Sigma_1), ..., g(\Sigma_{n+1})\} < g(\pi)$. Pelo teorema da substituição (2.17) temos que $g(\pi') \leq \max\{g(\Box A_1), ..., g(\Box A_n), g(\Sigma_1), ..., g(\Sigma_{n+1})\}$, conseqüentemente I (π') < I (π). Os dois outros casos (E∧ e E∨), têm prova muito similar.

(1.3). r é (I □) e F é □ *B*

Numa dedução desse tipo temos um caso muito especial onde uma fórmula máxima surge como conseqüência de I□, e é premissa maior de I□. O que pode não ser perceptível é o fato de que a fórmula em questão é na verdade só a primeira fórmula de um segmento maximal. Abaixo um exemplo que pode elucidar nossa observação desse fato.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Box\, G_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Box\, G_2\end{array} \quad \begin{array}{c}[\Box\, G_1]^1\ \ [\Box\, G_2]^2\\ \Sigma_3\\ A \to C\end{array}}{\boldsymbol{\Box\,(A \to C)}}\,\mathrm{I}\Box\ 1,2 \qquad \begin{array}{c}\Sigma_4\\ \Box\, A\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{\Box\,(A \to C)}^3}{A \to C}\,\mathrm{E}\Box \qquad \dfrac{\Box\, A^4}{A}\,\mathrm{E}\Box}{C}\,\mathrm{E}\!\to}{\Box\, C}\,\mathrm{I}\Box\ 3,4$$

Vemos com mais facilidade que as fórmulas em destaque são um segmento maximal de comprimento igual a 2. Agora sim podemos seguir com a forma da dedução π.

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Box\, A_1\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \Box\, A_n\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\Box\, A_1]^{i}_{1} \ldots [\Box\, A_n]^{i}_{n}\\ \Sigma_{n+1}\\ B\end{array}}{\Box B}\,\mathrm{I}\Box\ i_1, ..., i_n \qquad \begin{array}{c}\Lambda_1\\ \Box\, B_1\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Lambda_m\\ \Box\, B_m\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\Box B]^{j}_{0}\ \ [\Box B_1]^{j}_{1} \ldots [\Box B_m]^{j}_{m}\\ \Lambda_{m+1}\\ C\end{array}}{\Box\, C}\; r, j_0,..., j_m$$

Medeiros propõe transformar essa dedução em uma do tipo π' tal qual aparece abaixo

$$\pi' = \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Box A_1\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \Box A_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\Lambda_1\\ \Box B_1\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Lambda_m\\ \Box B_m\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{[\Box A_1]^{k}_{1} \ldots [\Box A]^{k}_{n} \qquad \begin{array}{c}[\Box A_1]^{i}_{1} \ldots [\Box A]^{i}_{n}\\ \Sigma_{n+1}\\ B\end{array}}{[\Box B]}\ I\Box\ i_{1}, \ldots, i_{n} \qquad [\Box B_1]^{j}_{1} \ldots [\Box B_m]^{j}_{m}\\ \Lambda_{m+1}\\ C\end{array}}{\Box C}\ r, k_1 \ldots k_n, j_1 \ldots j_m$$

Pode-se notar que $I(\pi') < I(\pi)$ uma vez que $g(\pi') = g(\pi)$, isto é, $g(\Box B)$ (que é fórmula máxima em π e $g(\pi) = g(\Box B)$) continua sendo uma fórmula máxima em π', e $s' = s - 1$, uma vez que $\Box B$, não aparece mais como premissa maior de aplicação da regra $I\Box$. E isso encerra o caso 1.

Caso 2. *F* é a conclusão de uma aplicação de $\bot_c$.

Temos que π é uma árvore da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg F]^{i}\\ \Sigma_0\\ \bot\end{array}}{F}\ i\ \bot_c \qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ H_1\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ H_{n+1}\end{array}}{C}\ r$$

Duas transformações podem ser feitas na sub-dedução Σ_0 de π. Pelo lema 2.20 Σ_0 pode ser transformada em uma dedução Σ^*_0 sem fórmulas triviais (fórmulas que são conseqüência da regra $\bot_c$ e premissas menores da regra E→), e pelo lema 2.18 Σ^*_0 pode ser transformada em uma dedução Σ'_0 sem fórmulas triviais, e onde toda hipótese da forma $[\neg F]$ é premissa maior de uma aplicação de E→ .

Vamos analisar a aplicação desses dois lemas passo-a-passo isolando a subderivação Σ_0 da árvore π. Começando pelo lema 2.20, notamos que a representação que temos da subderivação Σ_0 não sofre mudanças estruturais quando retiramos suas fórmulas triviais. Isso acontece porque não há fórmulas triviais em nossa representação, mas mudemos ao menos a nomeação e agora tendo aplicado o lema obtemos a subderivação Σ^*_0 no lugar de Σ_0.

Quanto ao lema 2.18, as mudanças estruturais na nova subderivação Σ^*_0 são perceptíveis. Relendo o lema 2.18 vemos que existem dois modos de aplicar o lema à subderivação Σ^*_0. O modo de aplicar o lema depende de como estão as fórmulas da forma $[\neg F]$ em Σ^*_0. Uma desses modos de aplicação é o caso trivial, onde as fórmulas da forma $[\neg F]$

já são premissas maiores de E→. Nesse caso, conectada lado-a-lado a cada fórmula $(\neg F)$ há em Σ^*_0 uma subderivação de Σ^*_0 (chamemos essa subderivação de $\Sigma'_{0,1}$) da fórmula (F). Além disso há uma subderivação $\Sigma'_{0,2}$ em Σ^*_0 partindo da fórmula $(\bot)$ conclusão da regra E→ chegando à fórmula $(\bot)$. Nesse primeiro caso a subderivação Σ^*_0 já teria a forma de Σ'_0, e esta seria como mostrado abaixo:

$$\Sigma'_0 \; = \qquad \begin{array}{c} \Sigma'_{0,1} \\ \dfrac{F \qquad [\neg F]^i}{\bot}\, E\rightarrow \\ \Sigma'_{0,2} \\ \bot \end{array}$$

O segundo modo de aplicação do lema 2.18 é para os casos onde as hipóteses da forma $[\neg F]$ não são premissas maiores de aplicação da regra E→ . Para esse caso a aplicação do lema implica na transformação da subderivação Σ^*_0 na subderivação Σ'_0 como é mostrado abaixo:

$$\Sigma^*_0 \; = \; \begin{array}{c} [\neg F]^i \\ \Sigma_0 \\ \bot \end{array} \qquad >> \qquad \Sigma'_0 = \quad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{[F]^j \qquad [\neg F]^i}{\bot}\, E\rightarrow}{\neg F}\, j\; I\rightarrow \\ \Sigma_0 \\ \bot \end{array}$$

Vemos que esse caso é um caso particular do primeiro onde a subderivação $\Sigma'_{0,1}$ é vazia, e $\Sigma'_{0,2}$ é a subderivação que vai da fórmula $(\neg F)$ conclusão da regra I → à fórmula final da subderivação $(\bot)$. Isto é, a primeira forma de Σ'_0 representa os dois casos possíveis, por isso optamos por ela para substituir na árvore π. Há ainda um pequeno problema de notação na primeira subderivação. A fórmula $(\bot)$ conseqüência da regra E→ que tem como premissa maior $[\neg F]^i$ pode ter mais de uma ocorrência na árvore (dependendo da quantidade de ocorrências de $[\neg F]^i$), o que deve ser indicado por colchetes. A ausência dessa notação gera complicações que veremos mais a frente na observação 2.21.1. Manteremos essa notação e cuidaremos desse problema apenas no capítulo 5.

Os lemas 2.20 e 2.18 garantem que tanto Σ^*_0 quanto Σ'_0 são deduções simplificadas, e além disso que $I(\Sigma^*_0) \leq I(\Sigma_0)$ e $I(\Sigma'_0) \leq I(\Sigma_0)$. Seja π_1 o resultado da substituição de Σ_0 por Σ'_0 (da forma que escolhemos) em π e $\Sigma'_{0,1}$ e $\Sigma'_{0,\,2}$ subderivações de Σ'_0, então π_1 é a árvore abaixo:

$$\begin{array}{c} \Sigma'_{0,1} \\ \dfrac{F \qquad [\,\neg F]^i}{\bot} \end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma'_{0,2}\\ \bot\end{matrix}}{F}\ i\ \bot_c \qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ H_1\end{matrix}\ \ldots\ \begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ H_{n+1}\end{matrix}}{C}\ r$$

É fácil notar que o índice de π_1 não aumenta em relação ao índice de π, isto é, $I(\pi_1) \leq I(\pi)$. Surge no entanto a subderivação $\Sigma'_{0,1}$ que tem a fórmula *F* (que é uma fórmula máxima em potencial na nossa transformação seguinte) como a última fórmula. *F* pode ser conclusão de três tipos de aplicação de regra, quais sejam eles, uma aplicação de regra de eliminação, uma aplicação de regra de introdução ou uma aplicação de absurdo clássico. O último caso pode ser descartado imediatamente por sabermos que π_1 é uma dedução sem fórmulas triviais, Medeiros passa a analisar os outros dois casos.

(2.1) A fórmula final de $\Sigma'_{0,1}$ (F) é a conclusão de uma aplicação de regra de eliminação.

Nesse caso, π_1 é transformada na seguinte dedução π':

$$\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma'_{0,1}\\ F\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ H_1\end{matrix}\ \ldots\ \begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ H_{n+1}\end{matrix}}{C}\ r \qquad [\neg C]^i}{\bot}\ E\rightarrow \\ \Sigma'_{0,2}\\ \bot\end{matrix}}{C}\ i,\ \bot_c$$

Para o caso particular onde a fórmula *C* é da forma $\bot$ Medeiros sugere que π' seja a seguinte árvore:

$$\begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\Sigma'_{0,1}\\ F\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ H_1\end{matrix}\ \ldots\ \begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ H_{n+1}\end{matrix}}{\bot}\ r\\ \Sigma'_{0,2}\\ \bot\end{matrix}$$

Por estarmos tratando o caso em que *F* é conclusão de regra de eliminação, *F* não é uma premissa maximal em nenhum dos casos, isso assegura que $I(\pi') < I(\pi_1) \leq I(\pi)$. Que é o que desejávamos provar. Veremos mais adiante que isso não encerra esse caso 2.1, e que ainda é preciso observar certas questões referentes à prova desse caso. Veremos isso mais adiante.

(2.2). A fórmula final de $\Sigma'_{0,1}$ (F) é conclusão de uma regra de introdução t.

Sejam $\Lambda_1,\ldots, \Lambda_{m+1}$ subderivações de $\Sigma'_{0,1}$. Os casos possíveis são os apresentados abaixo.

(2.2.1). r é (E→), t é (I →) e F é da forma ($A \to C$).

$$\pi_1 = \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}[A]^j\\ \Lambda_1\\ C\end{matrix}}{A \to C}\ \text{t, j} \qquad [\neg(A \to C)]^i}{\bot}\ \text{E}\to \\ \Sigma'_{0,2} \\ \bot\end{matrix}}{A \to C}\ \text{i}\ \bot_c \qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ A\end{matrix}}{C}\ \text{r} \qquad \text{é transformada em } \pi'\text{:} \qquad \cfrac{\begin{matrix}\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ [A]\\ \Lambda_1\\ C\end{matrix} \qquad [\neg C]^i}{\bot}\\ \Sigma'_{0,2}\\ \bot\end{matrix}}{C}\ \text{i}$$

A parte da transformação que envolve uma → - redução pode gerar inúmeros segmentos maximais com a forma da fórmula *A*, esses segmentos contudo são de grau menor do que a fórmula *F*, por isso I(π') < I(π₁).

(2.2.2). r é (E□), t é (I□) e F é da forma □ *C*.

$$\pi_1 = \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Lambda_1\\ \Box G_1\end{matrix}\ \ldots\ \begin{matrix}\Lambda_m\\ \Box G_m\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\Box G_1]^{i_1}\ \ldots\ [\Box G_m]^{i_m}\\ \Lambda_{m+1}\\ C\end{matrix}}{\Box C}\ \text{t, } i_1, \ldots, i_m \qquad [\neg\Box C]^j}{\bot}\ \text{E}\to \\ \Sigma'_{0,2}\\ \bot\end{matrix}}{\Box C}\ \text{j}}{C}\ \text{r}$$

É transformada em:

$$\pi' = \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Lambda_1 \qquad \Lambda_m\\ [\Box\, G_1] \ldots [\Box\, G_m]\\ \Lambda_{m+1}\\ C\end{array} \qquad\qquad [\neg\, C]^{j}}{\bot}\ E\rightarrow\\ \Sigma'_{0,2}\\ \bot\end{array}}{C}\ j,\ \bot_c$$

Notamos com facilidade que todas as ocorrências de F que eram fórmulas máximas desaparecem em π', sem o aparecimento de qualquer fórmula máxima nova, logo, I(π') < I(π₁).

(2.2.3). r é (I□), t é (I□) e F é da forma □ *A*.

$$\pi_1 = \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Lambda_1\\ \Box\, G_1\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Lambda_m\\ \Box\, G_m\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\Box\, G_1]^{i_1} \ldots [\Box\, G_m]^{i_m}\\ \Lambda_{m+1}\\ A\end{array}}{\Box\, A}\ t,\ i_1,\ \ldots,\ i_m \qquad [\neg\Box\, A]^{j}}{\bot}\ E\rightarrow\\ \Sigma'_{0,2}\\ \bot\end{array}}{\Box\, A}\ j\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ [\Box\, B_1]\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Sigma_n\\ [\Box\, B_n]\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\Box\, A]^{j_0}\, [\Box\, B_1]^{j_1} \ldots [\Box\, B_n]^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ B\end{array}}{\Box\, B}\ r, j_0,\ j_1, \ldots,\ j_n$$

É transformada em π' :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Lambda_1\\ [\Box\, G_1]\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Lambda_m\\ [\Box\, G_m]\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ [\Box\, B_1]\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Sigma_n\\ [\Box\, B_n]\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{[\Box\, G_1]^{k_1} \ldots [\Box\, G_m]^{k_m} \qquad \begin{array}{c}[\Box\, G_1]^{i_1} \ldots [\Box\, G_m]^{i_m}\\ \Lambda_{m+1}\\ A\end{array}}{[\Box\, A]}\ t,\ i_1, \ldots,\ i_m \quad [\Box\, B_1]^{j_1} \ldots [\Box\, B_n]^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ B\end{array}}{\Box\, B}\ I\Box\ k_1, \ldots,\ k_m,\ j_1,\ \ldots,\ j_n \qquad [\neg\Box\, B]^{i}}{\bot}\ E\rightarrow\\ \Sigma'_{0,2}\\ \bot\end{array}}{\Box\, B}\ \bot_c,\ i$$

Aqui como no caso 1.3 I(π') < I(π₁) porque d' = d₁ e s' = s₁ – 1.

Já sabemos que I(π₁) ≤ I (π), conseqüentemente, I(π') < I (π). E isso encerra os casos, bem como a prova do lema 2.21.

Observação 2.21.1: Recentemente Andou Yuuki publicou uma nota nos repositórios da Universidade de Horsei, em Tóquio, com críticas ao trabalho de Medeiros. Mais especificamente a crítica se refere aos casos 2.1 e 2.2.3 do lema acima (lema 2.21). Para cada um dos casos (2.1 e 2.2.3) podemos enumerar as críticas de Yuuki. Vejamos abaixo as críticas apresentadas nesta nota:

Críticas ao caso 2.1:

(i) A fórmula $\neg F$ descarregada por aplicação de $\bot_c$ pode aparecer mais de uma vez em π_1, mais especificamente $\neg F$ pode ser uma hipótese na subderivação $\Sigma'_{0,1}$.

(ii) Pode existir uma fórmula H_i em π_1 acima da aplicação da regra r, tal que $g(F) = g(H_i)$. Isso faria a redução gerar múltiplas cópias de H_i de modo que não fosse o caso que $I(\pi') < I(\pi)$.

Críticas ao caso 2.2.3:

(i) A fórmula $\neg\Box A$ descarregada por aplicação de $\bot_c$ pode aparecer mais de uma vez em π.

(ii) A fórmula $\Box A$ conectada lado-a-lado à fórmula $\neg\Box A$ não é uma fórmula máxima em π, mas passa a ser uma fórmula máxima em π', então se a transformação sugerida gera múltiplas cópias de $\Box A$ o índice de π' pode ser maior que o de π.

(iii) Se existe uma fórmula $\Box B_i$ $(1 \leq i \leq n)$ tal que $g(\Box B_i) = g(\Box A)$ em π, e se existe mais de um lugar de descarga da fórmula $\neg\Box A$, então podem existir múltiplas cópias de $\Box B_i$ de grau máximo em π'.

Apresento inicialmente as razões pelas quais nem todas as críticas de Yuuki interferem na estrutura do lema crítico, e em seguida os casos que comprometem a estrutura das transformações apresentadas por Medeiros.

Em primeiro lugar, podemos notar que algumas críticas não procedem. Na crítica 2.1 (ii) Yuuki diz que a redução de π em π' geraria múltiplas cópias dessa fórmula H_i que pode ter o grau igual ao de F. Isso contudo não pode acontecer uma vez que tanto em π quanto em π' há apenas uma aplicação da regra r da qual a fórmula H_i é premissa como podemos notar pela transformação.

A árvore π

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_{0,1}\\ F\end{array}\qquad [\neg F]^{i}}{\perp}\\ \Sigma'_{0,2}\\ \perp\end{array}}{F}\ {\scriptstyle i\ \perp_{c}}\qquad \begin{array}{c}\Sigma_{1}\\ H_{1}\end{array}\ \ldots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ H_{n+1}\end{array}}{C}\ r$$

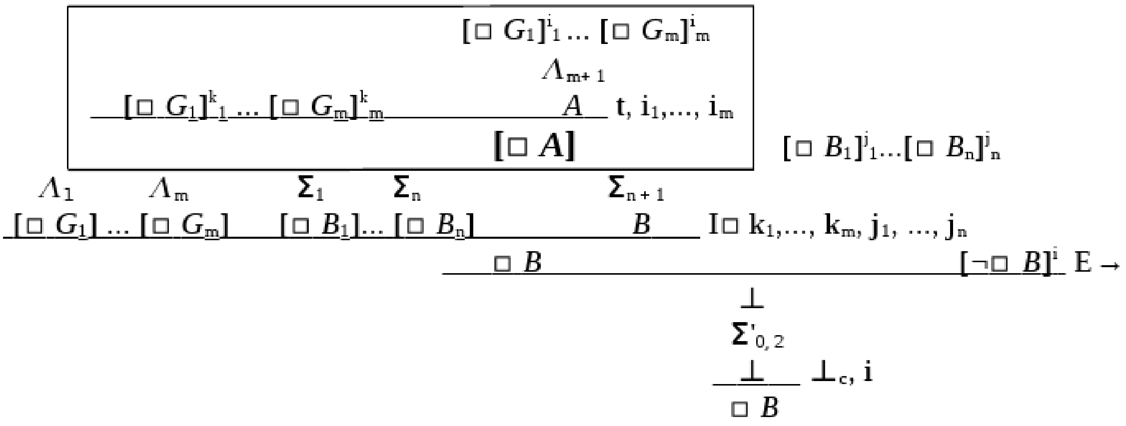
É transformada em π' da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_{0,1}\\ F\end{array}\qquad \begin{array}{c}\Sigma_{1}\\ H_{1}\end{array}\ \ldots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ H_{n+1}\end{array}}{C}\ r\qquad [\neg C]^{i}}{\perp}\ \mathrm{E}\rightarrow\\ \Sigma'_{0,2}\\ \perp\end{array}}{C}\ {\scriptstyle i,\ \perp_{c}}\qquad \text{ou da forma}\qquad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_{0,1}\\ F\end{array}\qquad \begin{array}{c}\Sigma_{1}\\ H_{1}\end{array}\ \ldots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ H_{n+1}\end{array}}{\perp}\ r\\ \Sigma'_{0,2}\\ \perp\end{array}$$

No caso da crítica 2.2.3 (ii) nós notamos que a fórmula □*A* (conectada lado-a-lado à fórmula ¬□*A*) passa a ser uma fórmula máxima em π', mas essa substitui um segmento máximo antes existente, diminuindo assim o índice de π' com relação a π.

$$\pi_{1} = \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\boxed{\dfrac{\begin{array}{c}\Lambda_{1}\\ \Box G_{1}\end{array}\ldots\begin{array}{c}\Lambda_{m}\\ \Box G_{m}\end{array}\qquad \begin{array}{c}[\Box G_{1}]^{i}_{1}\ldots[\Box G_{m}]^{i}_{m}\\ \Lambda_{m+1}\\ A\end{array}}{\Box A}\ \mathbf{t},\mathbf{i}_{1},\ldots,\mathbf{i}_{m}}\qquad [\neg\Box A]^{j}}{\perp}\ \mathrm{E}\rightarrow\\ \Sigma'_{0,2}\\ \dfrac{\perp}{\Box A}\ \mathbf{j}\end{array}\qquad \begin{array}{c}\Sigma_{1}\\ [\Box B_{1}]\end{array}\ldots\begin{array}{c}\Sigma_{n}\\ [\Box B_{n}]\end{array}\qquad \begin{array}{c}[\Box A]^{j}_{0}\,[\Box B_{1}]^{j}_{1}\ldots[\Box B_{n}]^{j}_{n}\\ \Sigma_{n+1}\\ B\end{array}}{\Box B}\ \mathbf{r},\mathbf{j}_{0},\mathbf{j}_{1},\ldots,\mathbf{j}_{n}$$

É transformada em π' :



A subderivação enquadrada em π_1 e em π' é a mesma, mas em π' a conclusão dessa subderivação ($\Box A$) é uma fórmula máxima. Acontece que em π' os segmentos maximais da forma $\Box$A são notoriamente menores que os de π_1. Quanto à possibilidade da criação de múltiplas cópias da fórmula máxima $\Box A$, isso só seria o caso se existissem múltiplas hipóteses da regra I□ da forma $\Box A$, mas nesse caso todas elas seriam já segmentos máximos em π_1 e a transformação não favoreceria o aparecimento de nenhuma nova fórmula máxima. A crítica 2.2.3 (iii), recai nos casos das críticas 2.1 (i) e (ii) e da crítica 2.2.3 (i).

Podemos notar que as críticas que são feitas para os casos 2.1 (i) e 2.2.3 (i) são do mesmo tipo, qual seja, podem sobrar hipóteses negadas de π_1 (e que eram descarregadas em π_1) na dedução reduzida π' mas que não sejam descarregadas em π'. Nesse caso as críticas procedem, mas o problema com reduções desse tipo possivelmente seria resolvido tal como em Gianluigi Bellin (Bellin, 1995), mas não vamos tratar dele aqui, pois a idéia é apresentar o procedimento da prova de Medeiros e não resolver definitivamente o problema apresentado por Yuuki. O procedimento usado por Bellin será usado nesse trabalho no capítulo 5 em nossa prova de normalização do sistema NK.

Teorema 2.22 (Teorema de Normalização em NS4.) Se π é uma dedução de *C* a partir de Γ em NS4, então π pode ser transformada em uma dedução normal de *C* a partir de Γ em NS4.

Prova: seja π uma dedução de *C* a partir de Γ. Pelo lema 2.19, π pode ser transformado em uma dedução simplificada π_0. A prova desse teorema de normalização é por indução no índice de π_0.

Seja $I(\pi_0) = \langle d, s\rangle$. Escolhe-se a subderivação Σ tal que $g(\Sigma) = d$. Pelo lema crítico, 2.21, Σ pode ser transformado em uma dedução simplificada Σ' tal que $I(\Sigma') < I(\Sigma)$. Seja π_1 o resultado de substituir Σ' por Σ em π_0, e seja *A* a fórmula final de Σ. Medeiros mostra que $I(\pi_1) < I(\pi_0)$.

Pode-se notar que a substituição de Σ por Σ' não afeta os segmentos de grau d, mas em alguns casos tem algum efeito sobre os segmentos contendo a fórmula *A*. Com isso falta somente mostrar que se existe ao todo um segmento maximal em π_1 contendo *A*, ou ele já existia em π_0 ou $g(A) < d$. Como prova disso notemos que existem apenas dois casos possíveis a se considerar: a fórmula *A* em Σ é ou uma conseqüência de E-regra ou de I$\Box$. No caso de ser uma conseqüência de E-regra ela não é uma conseqüência de E$\vee$, uma vez que todas as aplicações dessa regra têm $\perp$ como conseqüência. Para todos os outros casos de regra de eliminação notamos que $g(A) < d$. Resta o caso em que *A* é conclusão de I$\Box$, mas, nesse caso segmentos maximais contendo *A* em π_1 já apareciam em π_0.

Pela hipótese de indução π_1 pode ser transformada em uma dedução normal.

3 EQUIVALÊNCIA ENTRE S4 E NS4

Como já havíamos mencionado no capítulo 2 faremos uma prova de que o sistema proposto por Medeiros é equivalente ao conhecido sistema axiomático de lógica modal clássica S4. Esse capítulo se divide na apresentação do sistema S4, de alguns teoremas e do meta-teorema da dedução, que serão importantes em nossa prova, e da demostração de que os sistemas são equivalentes.

3.1 . O SISTEMA S4

A linguagem L_1 é uma linguagem modal-proposicional para os sistemas de lógica modal (aqui em especial S4) e é descrita da seguinte forma:

1 – *Variáveis proposicionais.* Usaremos as mesmas variáveis sentenciais da linguagem L.

2 – *Constantes lógicas.*

(a) Conectivos sentenciais: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\neg$

(b) Operador modal: $\Box$

3 – *Símbolos auxiliares.* (,).

Símbolos definidos. Uma vez que não estão na linguagem os símbolos $\leftrightarrow$ e $\Diamond$ eles são definidos do modo convencional ou seja, $(\alpha \leftrightarrow \beta) =_{df} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ e $\Diamond \alpha =_{df} \neg\Box\neg \alpha$.

De modo auxiliar usaremos como meta-variáveis de fórmulas as letras minúsculas do alfabeto grego de α a δ com ou sem subscritos.

4 – *Fórmulas*: α é uma *fórmula atômica* em L se e somente se α é uma das variáveis proposicionais. Uma fórmula pode ser definida como:

(a) Uma *fórmula atômica* é uma fórmula.

(b) Se α e β são fórmulas então $\neg\alpha$, $\Box\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ e $(\alpha \rightarrow \beta)$ são fórmulas.

(c) Nada além do que é determinado nos itens (a) e (b) é uma fórmula.

Axiomas:

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$
4. $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
5. $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
6. $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
7. $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
8. $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$
9. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg \beta) \to \neg \alpha)$
10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

K: $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$
T: $\Box\alpha \to \alpha$
4: $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$

Para diferenciar os dois axiomas de mesmo nome (4) sempre que forem usados vou me referir ao axioma 4 modal ($\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$) ou ao axioma 4 proposicional ($(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$).

Regras de inferência:

MP: $\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$
RN: $\vdash \alpha \vdash \Box\alpha$

Definição 3.1.1: Uma **Derivação** em S4 é uma seqüência Ω finita de fórmulas tal que qualquer linha ou bem é um axioma, ou hipótese, ou uma fórmula obtida de linhas anteriores por aplicação de uma das regras de inferência.

Dizemos que uma fórmula γ é uma conseqüência em S4 do conjunto de fórmulas Γ se e somente se existe uma seqüência Ω de fórmulas onde γ é a última fórmula desta seqüência, e qualquer fórmula γ_i de Ω é um axioma, ou uma das fórmulas de Γ, ou uma conseqüência direta, por aplicação de uma regra de inferência, de fórmulas precedentes a ela em Ω.

Definição 3.1.2: **Comprimento de derivação**. Chamamos de comprimento de uma derivação cd(Ω), o número *n* de linhas que uma derivação Ω tem.

3.2 . TEOREMA DA DEDUÇÃO

No sistema S4, bem como nos sistemas de lógica clássica proposicional e de primeira ordem definidos por axiomas, não existe uma regra de introdução da implicação. O problema com isso é que grande parte das proposições que precisamos provar em lógica, e muitas vezes também em linguagem natural, são da forma condicional. A falta de uma regra de introdução da implicação em um sistema axiomático é suprida na prova do meta-teorema da dedução que prova: **se** $\boldsymbol{\Gamma}, \alpha \vdash \beta$**, então** $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Após demonstrarmos o teorema poderemos introduzir uma implicação em provas de sistemas axiomáticos usando a aplicação de TD (teorema da dedução) como justificativa.

Teorema 3.2 : se $\boldsymbol{\Gamma}, \alpha \vdash_{S4} \beta$**, então** $\boldsymbol{\Gamma} \vdash_{S4} \alpha \rightarrow \beta$ **.**

Vamos supor $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. Logo, existe uma derivação Ω de β a partir de Γ e α em S4, isto é, existe uma seqüência de fórmulas tal que qualquer fórmula nessa seqüência é (i) uma fórmula de Γ, ou (ii) a fórmula α ou (iii) um axioma de S4, ou (iv) uma conseqüência imediata de uma aplicação de RN, ou (v) uma conseqüência imediata de uma aplicação de Modus Ponens, e a última fórmula desta seqüência é β.

A prova deste teorema será feita por indução no comprimento cd(Ω) da prova de $\boldsymbol{\Gamma}, \alpha \vdash_{S4} \beta$.

Base cd(Ω) = 1. Sendo esse o caso, β é (i) uma fórmula de Γ, ou (ii) a fórmula α ou (iii) um axioma de S4. Para os três casos vamos provar que $\Gamma \vdash_{S4} \alpha \rightarrow \beta$.

(i) $\beta \in \Gamma$

1. $\Gamma \vdash_{S4} \beta$	$\beta \in \Gamma$
2. $\Gamma \vdash_{S4} \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	Axioma 1
3. $\Gamma \vdash_{S4} \alpha \rightarrow \beta$	MP: 1, 2

(iii) $\beta = \alpha$ (reflexividade da barra $\vdash$)

1. $\Gamma \vdash_{S4} \alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ Instância do Axioma 1

2. $\Gamma \vdash_{S4} (\alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow (((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)))$ Inst. Axioma 2

3. $\Gamma \vdash_{S4} (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ MP: 1,2

4. $\Gamma \vdash_{S4} \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ Axioma 1

5. $\Gamma \vdash_{S4} (\alpha \rightarrow \alpha)$ MP: 3, 4

(iii) β é um Axioma em S4, logo $\Gamma \vdash \beta$.

A demonstração é análoga ao caso (i) com a diferença que a primeira linha invés de uma premissa é a aplicação de um axioma de S4, e na segunda linha aparece uma instância do axioma 1 que substitui β pelo axioma em questão.

No **Passo indutivo** vamos analisar o caso em que $cd(\Omega) > 1$, aqui a fórmula β além dos três casos apresentados na base pode ter sido obtida por aplicação de uma das regras de inferência de S4 (MP ou RN). Como **Hipótese de Indução** vamos admitir que o Teorema da Dedução vale para todas as linhas anteriores à linha onde β está. Isto é, para todo $k < n$ (onde n é a linha onde β está) em Ω se $\Gamma, \alpha \vdash_{S4} P_k$, então $\Gamma \vdash_{S4} \alpha \rightarrow P_k$. Para os casos (i), (ii) e (iii) a demonstração é igual à apresentada acima. Sobram dois casos possíveis para a fórmula β, ela é (iv) uma conseqüência imediata de uma aplicação de RN, ou (v) uma conseqüência imediata de uma aplicação de Modus Ponens. Para os dois casos vamos provar que $\Gamma \vdash_{S4} \alpha \rightarrow \beta$.

(iv) A fórmula β é uma conseqüência de RN, assim ela tem a forma $\Box\gamma$.

1.
.
.
.

$n - 1$. $\vdash_{S4} \gamma$ Pela restrição da regra γ é um teorema em S4.

n. $\Gamma \vdash_{S4} \Box \gamma$ RN: $j - 1$

$n + 1$. $\Gamma \vdash_{S4} \Box \gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow \Box\gamma)$ Inst. Axioma 1

$n + 2$. $\Gamma \vdash_{S4} \alpha \rightarrow \Box \gamma$ MP: $j, j + 1$

(v) A fórmula β é conseqüência da regra MP.

β é derivada de duas sentenças P_i e P_j cujos comprimentos de suas derivações são menores que n (onde n é a posição de β em Ω). Podemos dizer que essas duas fórmulas são γ e $\gamma \rightarrow \beta$ respectivamente. Por terem posições menores que n vale a Hipótese de indução para elas. No caso de P_i teremos que existe uma dedução $\alpha \rightarrow \gamma$ a partir de Γ, e no caso de P_j existe uma dedução de $\alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)$ a parir de Γ. Assim podemos construir a seguinte derivação:

1.
.
.
.
i. γ
i + 1. $\Gamma \vdash_{S4} \alpha \rightarrow \gamma$ H.I em i
j. $(\gamma \rightarrow \beta)$
j + 1. $\Gamma \vdash_{S4} \alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)$ H.I em j
j + 2. $\Gamma \vdash_{S4} (\alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$ Instância do axioma 2
j + 3. $\Gamma \vdash_{S4} ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$ MP: i + 1, j + 2
j + 4. $\Gamma \vdash_{S4} \alpha \rightarrow \beta$ MP: j + 1, j + 3

Isso encerra os casos e completa a prova por indução matemática.
Logo temos: se Γ**,** $\alpha \vdash_{S4} \beta$**,** então $\Gamma \vdash_{S4} \alpha \rightarrow \beta$.

3.3 . ALGUMAS DERIVAÇÕES EM S4

3.3.1- Ra1 : $\alpha \rightarrow \beta,\ \alpha \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$, chamaremos esse resultado de regra auxiliar 1.

1. $\alpha \rightarrow \beta$
2. $\alpha \rightarrow \gamma$
3. α HIP
4. β MP: 1, 3
5. γ MP: 2, 3
6. $\vdash \beta \rightarrow (\gamma \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$ Axioma 4

7. $(\gamma \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$ MP: 4, 6

8. $(\beta \wedge \gamma)$ MP: 5, 7

9. $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$ TD: 3 - 8

3.3.2 - Ra2: $\alpha \rightarrow \beta$, $\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta) \vdash (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \delta$, Vamos chamar esse resultado de regra auxiliar 2.

1. $\alpha \rightarrow \beta$

2. $\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta)$

3. $\alpha \wedge \gamma$ HIP

4. $(\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \alpha$ Axioma 4 proposicional

5. $(\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \gamma$ Axioma 5

6. α MP: 3, 4

7. β MP: 1, 6

8. γ MP: 3, 5

9. $(\gamma \rightarrow \delta)$ MP: 2, 7

10. δ MP: 8, 9

11. $\vdash (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \delta$ TD: 3 - 10

3.3.3 - IMC: O conjunto de axiomas acima é capaz de Introduzir Múltiplas Conjunções.

Isso é: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i \vdash_{S4} (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge ... \wedge \alpha_i)$

1. α_1 Hipótese

2. α_2 Hipótese

.

.

.

i. α_i Hipótese

i + 1. $\vdash \alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\alpha_1 \wedge \alpha_2))$ Axioma 3

i + 2. $\vdash \alpha_2 \rightarrow (\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ MP: 1, i + 1

i + 3. $\vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ MP: 2, i + 2

i + 4. $\vdash ((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \rightarrow (\alpha_3 \rightarrow ((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \alpha_3)))$ Instância do axioma 3

i + 5. $\vdash (\alpha_3 \rightarrow ((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \alpha_3))$ MP: i + 4, i + 3

i + 6. $\vdash ((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \alpha_3)$	MP: i + 5, 3
.	
.	
.	
i + ((i – 1) . 3). $\vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge ... \wedge \alpha_i)$	MP: (i + ((i – 1) . 3)) – 1, i

Se temos i fórmulas como hipótese, e como para introduzir conjunções ligando todas elas precisamos de um procedimento de pelo menos três linhas, temos que o comprimento dessa derivação é igual ao número de hipóteses (i), mais o número de linhas para introduzir a conjunção a cada uma delas que é ((i – 1) . 3).

3.3.4 - EMC: O conjunto de axiomas acima é capaz de eliminar múltiplas conjunções. Isto é,$(\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge(\alpha_3 \wedge ... \wedge \alpha_i))) \vdash \alpha_j$, onde: $1 \leq j \leq i$.

1. $(\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge(\alpha_3 \wedge ... \wedge \alpha_i)))$	Hipótese
2. $\vdash (\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge(\alpha_3 \wedge ... \wedge \alpha_i))) \rightarrow \alpha_1$	Instância do axioma 4
3. $\vdash (\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge (\alpha_3 \wedge ... \wedge \alpha_i))) \rightarrow (\alpha_2 \wedge(\alpha_3 \wedge ... \wedge \alpha_i))$	Instância do axioma 5
4. $\vdash \alpha_1$	MP: 1, 2
5. $\vdash (\alpha_2 \wedge(\alpha_3 \wedge ... \wedge \alpha_i))$	MP: 1, 3
6. $\vdash (\alpha_2 \wedge(\alpha_3 \wedge ... \wedge \alpha_i)) \rightarrow \alpha_2$	Instância do axioma 4
7. $\vdash (\alpha_2 \wedge(\alpha_3 \wedge ... \wedge \alpha_i))\rightarrow (\alpha_3 \wedge ... \wedge \alpha_i)$	Instância do axioma 5
8. $\vdash \alpha_2$	MP: 5, 6
9. $\vdash (\alpha_3 \wedge ... \wedge \alpha_i)$	MP: 5, 7
.	
.	
.	
((i – 1) . 4) – 3. $\vdash (\alpha_{i-1} \wedge \alpha_i)$	MP: ((i – 1) . 4) – 7, (i – 1) . 4) – 5
((i – 1) . 4) – 2. $\vdash (\alpha_{i-1} \wedge \alpha_i) \rightarrow A_{i-1}$	Instância do Axioma 4
((i – 1). 4) – 1. $\vdash (\alpha_{i-1} \wedge \alpha_i) \rightarrow A_i$	Instância do axioma 5
(i – 1) . 4). $\vdash \alpha_{i-1}$	MP: (i – 1) . 4) – 3, (i – 1) . 4) – 2
((i – 1) . 4) + 1. $\vdash \alpha_i$	MP: ((i – 1) . 4) – 3, ((i – 1). 4) – 1

Se i é o número de fórmulas ligadas pela conjunção, sabemos que existem na fórmula conjuntiva (i – 1) conjunções. Como a eliminação de cada conjunção é um procedimento de ao menos 4 passos temos que a prova terá ((i – 1) . 4) linhas mais a hipótese. Duas linhas antes da última temos uma implicação cujo conseqüente é a formula final da prova, quatro linhas antes temos o antecedente dessa implicação. Também é interessante notar que as partes conjuntivas da fórmula acima estão da linha 4 em diante, e uma 4 linhas após a outra, exceto nas duas últimas linhas onde essas fórmulas aparecem seguidas.

3.3.5 – IC: Se temos como hipóteses uma seqüência de implicações podemos obter como conseqüência uma fórmula que tenha a conjunção de todos os antecedentes implicando na conjunção de todos os conseqüentes dessas hipóteses. Chamaremos esse teorema de implicação das conjunções “IC”.

1) $\alpha_1 \rightarrow \beta_1$	Hipótese
2) $\alpha_2 \rightarrow \beta_2$	Hipótese
.	
.	
i) $\alpha_i \rightarrow \beta_i$	Hipótese
j) ($\alpha_1 \wedge \alpha_{2,}$ ..., $\wedge$ α_i)	Hipótese
j + 1) α_1	EMC em j
j + 2) α_2	EMC em j
.	
.	
j + i) α_i	EMC em j
k) β_1	MP: 1, j + 1
k + 1) β_2	MP: 2, j + 2
.	
.	
k + (i – 1) β_i	MP: i, j + i
l) ($\beta_1 \wedge \beta_{2,}$ ..., $\wedge$ β_i)	IMC: k até k + (i – 1)
m) ($\alpha_1 \wedge \alpha_{2,}$ ..., $\wedge$ α_i) $\rightarrow$ ($\beta_1 \wedge \beta_{2,}$ ..., $\wedge$ β_i)	TD: j até l

3.3.6 – SH: Silogismo Hipotético. $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$.

1) $\alpha \rightarrow \beta$	Hip
2) $\beta \rightarrow \gamma$	Hip
3) α	Hip

4) β MP: 1, 3

5) γ MP: 4, 2

6) $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ TD: 3 - 5

3.3.7 – Contraposição CP: $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$

1) $\alpha \rightarrow \beta$ Premissa

2) $\neg\beta$ Hip

3) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$ Ax: 9

4) $((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$ MP: 1, 3

5) $\neg\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$ Ax: 1

6) $\alpha \rightarrow \neg\beta$ MP: 2, 5

7) $\neg\alpha$ MP: 4, 6

8) $\vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ TD: 2 - 7

3.3.8 – Dupla negação DN: $\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

1) α Hip

2) $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \alpha)$ Ax: 1

3) $\neg\alpha \rightarrow \alpha$ MP: 1, 2

4) $(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha)$ Ax: 9

5) $(\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha$ MP: 3, 4

6) $\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$ Base do TD $\vdash A \rightarrow A$

7) $\neg\neg\alpha$ MP: 5, 6

8) $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ TD: 1, 7

ALGUNS RESULTADOS MODAIS DE S4:

3.3.9 – RM: $\vdash \alpha \rightarrow \beta \vdash (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$

1 $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ HIP

2 $\vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$ RN 1

3 $\vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$ K

4 $\vdash (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$ MP: 2, 3

3.3.10 – K1:$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$. Distribuição do operador de necessidade na conjunção.

1 $\vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$	Axioma 4
2 $\vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$	Axioma 5
3 $\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha$	RM: 1
4 $\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\beta$	RM: 2
5 $\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$	Ra1: 3, 4

3.3.11 – K2 : $\vdash ((\Box\alpha \wedge \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta))$

1 $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$	Axioma 3
2 $\vdash \Box\alpha \rightarrow \Box(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$	RM: 1
3 $\vdash \Box(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow (\Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta))$	K
4 $\vdash ((\Box\alpha \wedge \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta))$	Ra2: 2, 3

3.3.12 – RR: $\vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2,..., \wedge \alpha_i) \rightarrow \beta \vdash (\Box\alpha_1 \wedge \Box\alpha_2,... \wedge \Box\alpha_i) \rightarrow \Box\beta$

1) $\vdash (\alpha_1 \wedge (\alpha_2,..., \wedge \alpha_i)) \rightarrow \beta$	Hip
2) $\vdash \Box (\alpha_1 \wedge (\alpha_2,..., \wedge \alpha_i)) \rightarrow \Box \beta$	RM 1
3) $(\Box \alpha_1 \wedge (\Box\alpha_2,..., \wedge \Box \alpha_i))$	Hip
4) $\Box\alpha_1$	EMC: 3
.	
.	
i + 1) $\Box \alpha_i$	EMC: 3
j) $\Box \alpha_{i-1} \wedge \Box \alpha_i$	IMC: i, i + 1
j + 1) $(\Box \alpha_{i-1} \wedge \Box \alpha_i) \rightarrow \Box (\alpha_{i-1} \wedge \alpha_i)$	K2
j + 2) $\Box (\alpha_{i-1} \wedge \alpha_i)$	MP: j, j + 1
j + 3) $\Box \alpha_{i-2} \wedge \Box (\alpha_{i-1} \wedge \alpha_i)$	IMC: i – 1, j + 2
j + 4) $(\Box \alpha_{i-2} \wedge \Box (\alpha_{i-1} \wedge \alpha_i)) \rightarrow \Box (\alpha_{i-2} \wedge (\alpha_{i-1} \wedge \alpha_i))$	K2
.	
.	

j + (i – 1) . 4) $\Box (\alpha_1 \wedge (\alpha_2,..., \wedge \alpha_i))$ MP: (j + (i – 1) . 4) – 1, (j + (i – 1) . 4) – 2

k) $\vdash (\Box \alpha_1 \wedge (\Box\alpha_2,..., \wedge \Box \alpha_i)) \rightarrow \Box (\alpha_1 \wedge (\alpha_2,..., \wedge \alpha_i))$ TD: 3 até j + (i – 1) . 4

l) $\vdash (\Box \alpha_1 \wedge (\Box\alpha_2,..., \wedge \Box \alpha_i)) \rightarrow \Box \beta$ SH: 2, k

3.4 . EQUIVALÊNCIA ENTRE S4 E NS4

Abaixo iniciaremos a prova da equivalência entre os dois sistemas. Provaremos essa equivalência usando o meta-teorema: $\Gamma \vdash_{s4} \Psi$, se e somente se $\Gamma \vdash_{ns4} \Psi$. Onde Ψ é uma fórmula tanto de S4 quanto de NS4.

Lema 3.4.1 : Se $\Gamma \vdash_{S4} \Psi$, então $\Gamma \vdash_{NS4} \Psi$.

Supondo $\Gamma \vdash_{S4} \Psi$, temos que existe uma derivação Ω em S4, de Ψ a partir de Γ, onde Γ é um conjunto de premissas e α_n a última fórmula da seqüência Ω. Faremos a demonstração por indução no comprimento da derivação Ω de $\Gamma \vdash_{S4} \alpha_n$, cd($\Omega$).

Caso 1 - Base: cd(Ω) = 1, α_n é um dos axiomas de S4:

Caso 1.1 – K: α_n tem a forma $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ e em NS4 a seguinte dedução:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box A]^3 \qquad [\Box(A\to B)]^4 \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box(A\to B)]^1}{A\to B}\,\text{E}\Box \qquad \dfrac{[\Box A]^2}{A}\,\text{E}\Box}{B}\,\text{E}\to}{\Box B}\,\text{I}\Box_{1,2}}{\Box A\to\Box B}\,\text{I}\to_3}{\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)}\,\text{I}\to_4$$

Caso 1.2 - T: α_n tem a forma $\Box A \to A$, e temos a dedução abaixo em NS4:

$$\dfrac{\dfrac{[\Box A]^1}{A}\,\text{E}\Box}{\Box A\to A}\,\text{I}\to_1$$

Caso 1.3 - 4: α_n tem a forma $\Box A \to \Box\Box A$, e pode ser deduzida em NS4 como abaixo:

$$\dfrac{\dfrac{[\Box A]^1 \qquad [\Box A]^2}{\Box\Box A}\,\text{I}\Box_2}{\Box A\to\Box\Box A}\,\text{I}\to_1$$

Hipótese indutiva: Se $\Gamma \vdash_{S4} \alpha_{n-1}$, então $\Gamma \vdash_{NS4} A_{n-1}$.

Caso 2 - **Passo indutivo**: cd(Ω) > 1. Aqui α_n é a última fórmula da seqüência Ω e é derivada por uma das regras de inferência abaixo:

Caso 2.1: MP:

$\alpha, \alpha\to\beta \vdash \beta$

Ω é uma derivação em S4 que tem na última linha uma aplicação da regra MP e Ψ é α_n. A forma de Ω então é:

1.Γ
.
. Ω_1
.
i. α_i
.
. Ω_2
.
k. $\alpha_i \to \alpha_n$
n. α_n MP, i, k

Onde i < n.

Pela H.I há uma dedução π_1 de $\Gamma_1 \vdash A_i$ e uma dedução π_2 de $\Gamma_2 \vdash A_i \to A_n$ em NS4. Considerando que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$. Pela regra E→ temos então:

$$\mathrm{E}\!\to\ \dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 \\ \vdots\ \pi_1 \\ A_i\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2 \\ \vdots\ \pi_2 \\ A_i \to A_n\end{matrix}}{A_n}$$

Temos que se $\Gamma \vdash \alpha_n$ em S4, então $\Gamma \vdash A_n$ em NS4 no caso da regra MP.

Caso 2.2: RN

$\vdash \alpha \vdash \Box\alpha$

Ψ tem a forma $\Box\alpha$, pela HI temos que existe uma dedução π tal que $\Gamma \vdash \alpha$ em NS4 e $\Gamma = \{\}$. Assim, pela regra I$\Box$ podemos gerar uma demonstração de $\Box A$ sem maiores problemas como se segue abaixo:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \mathrm{A}\end{matrix}}{\Box \mathrm{A}}\ \mathrm{I}\,\Box$$

Não existem hipóteses abertas, então fizemos uso legítimo da regra I$\Box$. Encerramos assim todos os casos modais possíveis e demostramos[20] que se $\Gamma \vdash_{S4} \Psi$, então $\Gamma \vdash_{NS4} \Psi$.

3.4.1.1 Definição : $\wedge\,\Gamma$ é definida como a conjunção de todas as fórmulas de Γ.

Lema 3.4.2 : **Se $\Gamma \vdash_{NS4} \Psi$, então $\vdash_{S4} \wedge\,\Gamma \to \Psi$**.

Vamos supor $\Gamma \vdash_{NS4} \Psi$, logo existe uma dedução π, de Ψ a partir de Γ.

Faremos uma prova por indução no comprimento de $c(\pi)$ da dedução $\Gamma \vdash_{NS4} A_n$. Onde $A_n = \Psi$

Base: $c(\pi) = 1$, isto é, π é pura e simplesmente A, e "$\wedge\,\Gamma \to$ A" tem a forma $A \to A$. Desse modo é demonstrada em S4 de modo usual para sistemas de lógica proposicional como aparece no caso (ii) da base na prova do teorema da dedução (reflexividade da barra $\vdash$).

Passo Indutivo: $c(\pi) > 1$, isto é, A_n é obtida de Γ por alguma regra de inferência de NS4.

---

[20] Na verdade é preciso ainda provar a equivalência para fragmento proposicional, mas esse não é o foco do trabalho e além disso uma provas desse tipo não são difíceis de se encontrar na literatura especializada.

Hipótese indutiva: Se existe uma dedução de comprimento $c(\pi) - 1$ de $\Gamma \vdash_{NS4} A_{n-1}$, então $\vdash_{S4} \wedge \Gamma \rightarrow A_{n-1}$

$r(\pi)$ denota a última regra de inferência em π.

Caso 1: $r(\pi)$ é E□, assim π tem a forma:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \text{E}\Box \ \dfrac{\Box A}{A} \end{array}$$

Se $c(\pi) - 1$ é a dedução da forma $\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \Box A \end{array}$ então pela HI temos $\vdash \wedge \Gamma \rightarrow \Box A$.

Assim teremos:

1	$\vdash_{S4} \wedge \Gamma \rightarrow \Box\alpha$	H.I.
2	$\vdash_{S4} \Box\alpha \rightarrow \alpha$	T
3	$\vdash_{S4} (\wedge \Gamma \rightarrow \alpha)$	SH: 1,2

Caso 2: $r(\pi)$ é I□, e A é da forma $\Box C$, $\Gamma = \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_i\}$, e a forma de π é:

$$\text{I}\Box \ \dfrac{\begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \Sigma_1 \\ \Box B_{k1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \Sigma_2 \\ \Box B_{k2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \ldots \Gamma_i \\ \Sigma_n \\ \Box B_{ki} \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\Box B_k]^1 \quad [\Box B_k]^2 \ldots \ [\Box B_k]^i \\ \Sigma_{i+1} \\ C \end{array}}{\Box C} \ 1,2, \ldots, n$$

Assim temos $\vdash_{S4} \wedge \Gamma_1 \rightarrow \Box \beta_{k1}, \ldots, \vdash_{S4} \wedge \Gamma_i \rightarrow \Box \beta_{ki}$ como hipóteses da indução e em S4 uma derivação como a da página seguinte.

1 $\vdash_{s4} \wedge \Gamma_1 \rightarrow \Box \beta_{k1}$	Hipótese de indução
2 $\vdash_{s4} \wedge \Gamma_2 \rightarrow \Box \beta_{k2}$	Hip. Ind.
.	
.	
i $\vdash_{s4} \wedge \Gamma_i \rightarrow \Box \beta_{ki}$	Hip. Ind.
i + 1 $\vdash_{s4} (\Box \beta_{k1} \wedge \Box \beta_{k2}, \wedge ..., \wedge \Box \beta_{ki}) \rightarrow \gamma$	Hip. Ind.
i + 2 $\vdash \Box (\Box \beta_{k1} \wedge \Box \beta_{k2}, \wedge ..., \wedge \Box \beta_{ki}) \rightarrow \Box\gamma$	RM: i + 1
j . $(\wedge \Gamma_1 \wedge \wedge \Gamma_2 \wedge \dots \wedge \wedge \Gamma_i)$	Hip
k . Γ_1	EMC : j
.	
.	
k + (i – 1) . Γ_i	EMC: j
l . $\Box \beta_{k1}$	MP: 1, k
.	
.	
l + (i – 1) . $\Box \beta_{ki}$	MP: i, k+ (i – 1)
m. $(\Box \beta_{k1} \wedge ... \wedge \Box \beta_{ki})$	IMC: l até l +(i – 1)
m + 1. $\vdash (\Box \beta_{k1} \wedge ... \wedge \Box \beta_{ki}) \rightarrow \Box (\beta_{k1} \wedge ... \wedge \beta_{ki})$	Instância do teorema K2
m + 2. $\vdash \Box (\beta_{k1} \wedge ... \wedge \beta_{ki}) \rightarrow \Box \Box (\beta_{k1} \wedge ... \wedge \beta_{ki})$	Instância do axioma 4 (modal)
m + 3. $\vdash \Box (\beta_{k1} \wedge ... \wedge \beta_{ki}) \rightarrow (\Box \beta_{k1} \wedge ... \wedge \Box \beta_{ki})$	Instância do teorema K1
m + 4. $\vdash \Box \Box (\beta_{k1} \wedge ... \wedge \beta_{ki}) \rightarrow \Box (\Box \beta_{k1} \wedge ... \wedge \Box \beta_{ki})$	RM: m + 3
m + 5. $\Box (\beta_{k1} \wedge ... \wedge \beta_{ki})$	MP: m + 1, m
m + 6. $\Box \Box (\beta_{k1} \wedge ... \wedge \beta_{ki})$	MP: m + 2, m + 5
m + 7. $\Box (\Box \beta_{k1} \wedge ... \wedge \Box \beta_{ki})$	MP: m + 4, m + 6
m + 8. $\Box \gamma$	MP: i + 2, m + 7
n. $\vdash (\wedge \Gamma_1 \wedge \wedge \Gamma_2 \wedge \dots \wedge \wedge \Gamma_i) \rightarrow \Box\gamma$	TD: de k até m + 8

Temos então $\vdash_{s4} \wedge \Gamma \rightarrow \Box\gamma$

Como esses são todos os casos possíveis para o caso modal, e não é o foco do trabalho tratar o caso proposicional, concluímos que: se $\Gamma \vdash_{NS4} \Psi$, então $\vdash_{S4} \wedge \Gamma \rightarrow \Psi$. Que é o que queríamos demonstrar.

Lema 3.4.3: Se $\vdash_{S4} \wedge \Gamma \rightarrow \Psi$, então $\Gamma \vdash_{S4} \Psi$.

Sejam $P_1, P_2, ..., P_i$ todas as fórmulas de Γ, e $\wedge \Gamma$ a conjunção de todas as fórmulas de Γ e Ψ a fórmula α_n.

Vamos admitir $\vdash_{S4} (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_i) \rightarrow \alpha_n$,

1. P_1	Hip
2. P_2	Hip
.	
.	
.	
i. P_i	Hip
i + 1. $\vdash_{S4} (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_i) \rightarrow \alpha_n$	Suposição acima
i + 2. $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_i)$	IMC: 1 até i
i + 3. α_n	MP i + 1, i + 2

Logo, $P_1, P_2, \ldots, P_i \vdash_{S4} \alpha_n$, ou seja $\Gamma \vdash \alpha_n$.
Como α_n é Ψ temos, se $\vdash_{S4} \wedge \Gamma \rightarrow \Psi$, então $\Gamma \vdash_{S4} \Psi$.

Lema 3.4.5: se $\Gamma \vdash_{NS4} \Psi$, então $\Gamma \vdash_{S4} \Psi$.

Uma vez que sabemos :

$\Gamma \vdash_{NS4} \Psi$, implica em $\vdash_{S4} \wedge \Gamma \rightarrow \Psi$ (Lema 3.4.2), e que
$\vdash_{S4} \wedge \Gamma \rightarrow \Psi$, implica $\Gamma \vdash_{S4} \Psi$ (Lema 3.4.3).

Temos que se $\Gamma \vdash_{NS4} \Psi$, então $\Gamma \vdash_{S4} \Psi$.

Teorema 3.4.6:

$\Gamma \vdash_{NS4} \Psi$ se e somente se $\Gamma \vdash_{S4} \Psi$.

Segue facilmente dos lemas:

Se $\Gamma \vdash_{S4} \Psi$, então $\Gamma \vdash_{NS4} \Psi$	Lema 3.4.1;	e
Se $\Gamma \vdash_{NS4} \Psi$, então $\Gamma \vdash_{S4} \Psi$	Lema 3.4.5.	

Concluímos esse capítulo observando que assim como os sistemas propostos por

Prawitz, o sistema NS4 é equivalente ao axiomático S4, assim os três sistemas têm a mesma força dedutiva. Nos próximos capítulos iremos analisar outros sistemas de lógica modal em dedução natural, o desenvolvimento do trabalho se propõe a formular outros sistemas modais em dedução natural baseados no de Medeiros. Discutiremos também, mas de forma mais breve, sobre outros estilos de sistemas de lógica modal em dedução natural.

4 TRATAMENTO DA LÓGICA MODAL EM DEDUÇÃO NATURAL

4.1 . HISTÓRICO DA LÓGICA MODAL EM DEDUÇÃO NATURAL

A história dos sistemas modais em dedução natural, obviamente, não se limita aos trabalhos de Prawitz e Medeiros. Muitas maneiras de formular regras de inferência em sistemas modais para dedução natural foram apresentadas no espaço de tempo entre os dois trabalhos e também após 2006[21]. Iremos apresentar de modo breve alguns destes sistemas e suas regras incluindo o apresentado por Bierman & Paiva (Bierman & Paiva, 2000) que traz pela primeira vez a regra (I$\Box$) usada no sistema NS4.

Sistemas do tipo Fitch:

Além de sistemas de dedução natural em forma de árvores (estilo Gentzen) existem também sistemas em linha, ou no estilo Fitch. Esses sistemas se caracterizam por numerar as linhas da dedução, e recorrer a cada uma dessas linhas tantas vezes quanto for necessário, usando apenas a referência da linha em questão, ao invés de reiterar ocorrências de fórmulas em folhas de uma árvore. Podemos então notar que a organização das demonstrações desse estilo são muito semelhantes à organização das demonstrações que são feitas em um sistema axiomático. Por serem sistemas de dedução natural, no entanto, têm regras no lugar de axiomas.

Em lógica modal muitos sistemas no estilo Fitch foram apresentados. Em *Natural deduction on normal modal logic* (Hawthorn, 1990), por exemplo, John Hawthorn fala brevemente da história desses sistemas desde a elaboração problemática de sistemas desse tipo pelo próprio Fitch até Bull & Segerberg, que elaboram um sistema de dedução natural modal como o K axiomático, e sobre essa base adicionam axiomas modais tornando o sistema K uma teoria caracterizada por esse novo axioma. A idéia de Bull e Segerberg é ampliada por Hawthorn que apresenta o sistema NDK e sua equivalência com K. Mais adiante também apresenta uma forma de adquirir outros sistemas mudando algumas restrições da regra de reiteração do operador $\Box$ (necessário). Hawthorn diz também que esse método de variar as

---

[21] Ano de publicação do artigo de Medeiros.

restrições não é capaz de provar todo tipo de fórmula e amplia NDK para um sistema NDK* e depois para um NDK(/).

Bem antes do trabalho de Hawthorn, em 1979 O. A. Robinson (Robinson, 1979) apresenta, no mesmo periódico, um conjunto de regras para o sistema modal S4. São regras de introdução e eliminação para os operadores modais □ e ◊. A regra de eliminação do □ nesse trabalho é igual à de Prawitz e Medeiros. A introdução do ◊ também é convencional na literatura: se temos uma sentença qualquer então podemos introduzir esse operador na sentença. Já os casos da introdução do □ e eliminação do ◊ são mais complicados. Robinson sugere que usar uma dessas regras requer a abertura de uma subderivação na derivação geral em que estejamos demonstrando algo. Para a regra de eliminação do ◊ podemos, quando *p* é uma sentença qualquer, se temos ◊*p*, abrir uma subderivação e supor *p,* e o que obtivermos dessa suposição, digamos uma sentença *q*, com a restrição de que seja introduzido o operador ◊ a *q*, pode ser concluído fora dessa subderivação. Para ficar mais claro um exemplo do próprio Robinson:

(◊ E)	j	◊*p*	Hipótese
	k	*p*	E ◊ linha j
	l	*q*	(Alguma razão)
	m	◊*q*	I ◊ linha l
	n	◊*p* → ◊*q*	I → de j até m

No exemplo as letras de 'j' a 'n' representam as linhas da derivação, o sublinhado marca onde começa e onde termina uma subderivação e a justificativa para a linha 'l' é a dedução proposicional que transforma *p* em *q*.

Para o caso da regra de introdução do □ abre-se uma subderivação com uma fórmula do tipo □*p* como hipótese e deriva-se fórmulas normalmente nessa subderivação, a fórmula derivada pode ter um □ acrescentado a ela. Vejamos para esse caso o exemplo da derivação do esquema 4:

(□I)	1	□*p*	Hipótese
	2	□*p* ∨ □*p*	I ∨ linha 1
	3	□*p*	Tautologia 2
	4	□□*p*	I□ linha l
	5	□*p* → □□*p*	I→de 1 até 5

O autor propõe que esse sistema pode ser transformado no sistema S5 se acrescentarmos como regra de inferência a introdução do esquema E ◊*p* → □◊*p.*

Nenhum dos sistemas acima serve às nossas pretensões. Além de os sistemas serem todos de um formato que por si só prejudica a possibilidade de se fazer reduções nas deduções de modo a remover fórmulas máximas, alguns desses sistemas não são puramente de dedução natural em lógica modal. É preciso ficar claro que estamos aqui fazendo a defesa de um método unificado que sempre obtém conclusões a partir de certas premissas ou hipótese, mesmo que essas hipóteses venham a ser descartadas ao fim da dedução. Desejamos que todas as ocorrências de fórmulas dos sistemas que apresentaremos em 4.2, que não sejam premissas ou hipóteses, sejam obtidos por aplicações de regras de inferência. Esse desejo traz à tona nossa forma de caracterizar sistemas de dedução natural, não pensamos em sistemas desse tipo que tenham fórmulas, além das premissas e hipóteses, que não sejam inferidas. A adição de um esquema como regra (como no caso do sistema de Robinson), isso é, a adição de uma regra que introduz uma fórmula, em qualquer passo da prova, sem que essa precise ser inferida de outras fórmulas, para nós, é um modo de “deformação[22]” de um sistema de dedução natural. Não se trata de uma defesa ortodoxa em prol de sistemas puros, mas de uma defesa da didática, e das propriedades meta-teoréticas de sistemas de dedução natural podem oferecer.

Ademais, uma certa confusão pode se estabelecer na adição de fórmulas (esquemas) como regras. É que em muitos casos adicionamos axiomas a um sistema de lógica com o intuito de obter uma nova teoria. Quando isso acontece estamos de certo modo adicionando conteúdo à lógica que é próprio da teoria e distinto da lógica. Normalmente essa distinção se faz dando preferência a regras para os conectivos, quantificadores e operadores lógicos e axiomas para a teoria que se quer tratar nesse sistema. Contudo, não seria assim no caso de sistemas como o S5 de Robinson, estamos tratando aqui de lógicas modais em geral, e não de teorias distintas que só podem ser tratadas em lógica modal. O argumento um tanto turvo pode ser esclarecido com um exemplo simples. Em lógica clássica de primeira ordem (mas não apenas na lógica clássica) podemos adicionar o símbolo matemático de pertinência ($\in$) e definir outras relações a partir dele (como contido, contém etc), com a igualdade (e também uma constante e uma função) pode-se definir desigualdades e com adição de axiomas podemos obter teorias como a aritmética de Peano, a teoria ingênua de conjuntos, a teoria de Zermelo-Fraenkel dos conjuntos e muitas outas. No entanto, fazemos essa adição de axiomas numa tentativa de unir “forma” (lógica[23]) e “conteúdo” (teoria em particular). Essa analogia

---

[22] Deformação no sentido de mudança de forma, apenas. Admitimos que em alguns casos essa deformação pode ser importante para os fins de quem a pratica, e além disso que na maioria dos casos não há perdas significativas na adição de fórmulas (esquemas) como regras em sistemas de dedução natural.

[23] Que 'forma' aqui não seja uma antítese completa da palavra 'conteúdo', pois essa separação poderia levar-nos a um longo debate sobre a lógica e seu comprometimento ontológico.

serve para mostrar que transformar um sistema de lógica em um outro por inserção de um axioma pode ser falsamente confundido com uma separação de uma mesma “forma” em “forma e conteúdo”. Lógicas modais distintas podem ser entendidas como “formas” ou lógicas distintas, e não como teorias distintas, assim, a lógica modal S4 está para a S5, mais como a lógica intuicionista está para a clássica, do que como a lógica clássica está para a teoria axiomática dos conjuntos.

Essa nossa perspectiva usou como exemplos apenas teorias de primeira ordem, e não levou em conta teorias em lógicas proposicionais, (a qual é a lógica foco do trabalho). De fato, isso acontece porque as teorias são diferentes umas das outras justamente pelo tipo de objetos que admitem como constantes em seus domínios e pelas relações que estabelecem entre eles. O fato de teorias serem comumente em primeira ordem (ou ordem superior), e estarmos trabalhando com lógicas modais proposicionais não fere nosso argumento, pois o trabalho aqui apresentado é a base para sistemas de primeira ordem que podem vir a ser apresentados posteriormente. Pelas razões apresentadas não continuaremos mais abordando os sistemas de dedução natural apresentados nesse tópico.

Sistemas de dedução natural etiquetados:

Os últimos trabalhos em dedução natural, e especialmente dedução natural em lógicas modais ou não-clássicas em geral, têm apresentado entre suas referências bibliográficas trabalhos como o livro de Dov Gabbay, *Labelled deductive systems*, a tese de doutoramento de A. K. Simpson, e o livro de Luca Viganò. *Labelled non-classical logics.* Tais trabalhos apresentam sistemas muito interessantes de dedução natural em árvores, os com fórmulas etiquetadas. Um sistema desse tipo para lógica modal é capaz de incrementar informações da semântica de lógica modal na sintaxe através de fórmulas relacionais e etiquetadas, que de certo modo representam as relações de acessibilidade entre mundos. A idéia geral é etiquetar, ou marcar uma fórmula modal, ou proposicional, com um termo (variável, funções ou constantes) da linguagem. Dessa forma podemos entender a etiqueta como o contexto onde a sentença modal é verdadeira. As fórmulas relacionais fazem o papel de ligar um termo a outro, introduzindo a idéia de acesso de um contexto a um outro. Como exemplo podemos pensar no caso onde Ψ é uma fórmula, modal ou proposicional, da linguagem de um determinado sistema lógica, $x: \Psi$ vai ser a fórmula etiquetada correspondente à fórmula Ψ. Uma fórmula relacional tem a forma t_1Rt_2 onde 't_1' e 't_2' são termos da linguagem L em questão. Para tornarmos tudo isso um pouco mais claro apresentamos abaixo as regras de inferência em um sistema etiquetado de lógica modal equivalente ao sistema T.

$$E\Box\ \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ x: \Box A\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\pi_2\\ xRy\end{matrix}}{y: A} \qquad\qquad I\Box)\ \dfrac{\begin{matrix}[xRy]^i\\ \pi\\ y: A\end{matrix}}{x: \Box A}\ i$$

$$ref)\ \dfrac{xRy}{xRx}$$

Nas regras acima 'x' e 'y' são variáveis o que torna clara a intuição da regra de introdução do □, com essa regra queremos dizer que se um contexto 'x' se relaciona com um contexto 'y' arbitrário e em 'y' a fórmula (*A*) é derivada (demonstrada ou deduzida), (□*A*) pode ser derivado como conseqüência no contexto 'x', uma vez que 'y' pode ser generalizado para qualquer contexto que se relaciona com o contexto 'x'. A regra de eliminação é mais clara ainda, se a fórmula (□*A*) é derivada no contexto 'x' e e sabemos que o contexto 'x' tem acesso ao 'y', então podemos derivar a fórmula (*A*) no contexto 'y'. Por fim, a regra '*ref*' acrescenta a idéia de reflexividade no sistema, isto é, o fato de que todo contexto se relaciona com ele mesmo. Abaixo uma dedução no sistema T.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[y: \Box A]^1 \qquad \dfrac{[xRy]^2}{yRy}\ ref)}{y: A}\ E\Box}{y: \Box A \to A}\ I{\to}\ 1}{x: \Box(\Box A \to A)}\ I\Box\ 2$$

As críticas feitas aos sistemas do estilo Fitch não são aplicadas a esse caso. Inclusive, na literatura especializada já aparecem algumas provas de normalização para sistemas desse tipo, no entanto não era comum, antes desses sistemas o uso de fórmulas etiquetadas. Não parece surgir nenhum problema com a inserção de fórmulas etiquetadas e relacionais em uma dedução, contudo, para quem não conhece a semântica da lógica modal as regras podem parecer um pouco menos intuitivas. Além de uma desvantagem no sentido didático também há um problema com o tipo de lógica que se pode formalizar usando sistemas desse tipo. Um exemplo de lógica modal que não pode ser formalizada seria a lógica da provabilidade, que por ser da classe dos enquadramentos transitivos finitos a relação em seu modelo só pode ser expressa em segunda ordem. Desse modo, mesmo que os sistemas com fórmulas etiquetadas possam formalizar um grande número de lógicas modais (K, D, T, K4, S4, B, S5) sabemos que a formulação não é adequada para todas as lógicas modais.

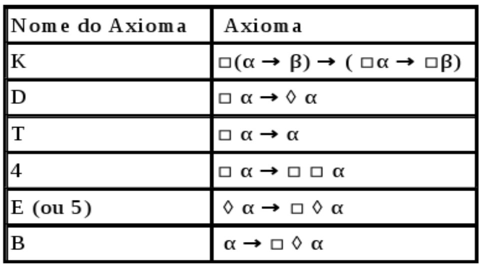
Sistemas em árvore sem fórmulas etiquetadas:

Bierman e Paiva (Bierman & Paiva, 2000) apresentaram uma nova regra de introdução do $\Box$, a qual é usada por Medeiros no sistema NS4 trabalhado no capítulo anterior, e também por outros autores em versões de sistemas modais em especial de S4. O não aparecimento de fórmulas relacionais e etiquetadas nesse tipo de sistemas de dedução natural pode ajudar na intuição e no aprendizado das deduções modais. Contudo, não temos regras para os principais sistemas de dedução natural como acontece no caso dos sistemas etiquetados. A propósito disso nosso trabalho é apresentar alguns sistemas de dedução natural para lógicas modais e discutir a intuição que nos leva até eles.

4.2 . LÓGICA MODAL EM DEDUÇÃO NATURAL, OUTRA ALTERNATIVA

Ao contrário da perspectiva exposta nos sistemas etiquetados, que através de uma intuição semântica apresentam regras para fórmulas relacionais, os sistemas que serão aqui apresentados têm uma motivação sintática. Com base na regra I$\Box$ comentada acima nós pensamos o que seria preciso fazer para obter sistemas de dedução natural equivalentes aos sistemas K, KD, KT, KDT, K4, KB e S5. A intuição básica seria restringir a regra proibindo a derivação do teorema no sistema N (dedução natural) equivalente ao axioma que caracteriza o sistema A (sistema axiomático em questão).

Os sistemas axiomáticos de lógica modal são caracterizados pela presença ou ausência de determinados axiomas. Abaixo apresento uma tabela com os axiomas aqui trabalhados:



Nome do Axioma	Axioma
K	$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$
D	$\Box\,\alpha \rightarrow \Diamond\,\alpha$
T	$\Box\,\alpha \rightarrow \alpha$
4	$\Box\,\alpha \rightarrow \Box\,\Box\,\alpha$
E (ou 5)	$\Diamond\,\alpha \rightarrow \Box\,\Diamond\,\alpha$
B	$\alpha \rightarrow \Box\,\Diamond\,\alpha$

Os sistemas podem ser entendidos como conjuntos que combinam esses axiomas, a regra E→ e a regra RN : $\vdash A / \vdash \Box A$. Cada combinação diferente desses axiomas é um sistema[24]. Desse modo temos que o sistema **K** = { K, E →, RN }, o sistema **T** = **K** + T, o sistema **D** = **K** + D, o sistema **KTD** = **T** + **D**, o sistema **4** = **K** + 4, o já discutido **S4** = **T** + 4 o sistema, **B** = **T** + B e o sistema **S5** = **T** + E (ou **S4** + B).

4.2.1 - Sistema NK[25] e sua equivalência ao sistema K

Seguindo nossa intuição sobre como criar regras para esse sistema temos que proibir a derivação dos teoremas T, e 4 no sistema NS4[26], e assim teoricamente obtemos o sistema **K**. É fácil excluir o teorema T do conjunto das derivações em NS4, basta excluir do sistema NS4 a regra E□ que, como podemos ver no caso 1.2 de 3.4, é a regra responsável pela derivação desse teorema. Excluir o teorema 4 depende de alguma restrição na I□, uma vez que esta é a regra responsável pela derivação desse teorema, nesse caso uma primeira solução seria usar a regra I□

$$\begin{array}{c} [\Box B_1]^{i}_{1} \ldots [\Box B_n]^{i}_{n} \\ . \\ . \\ (I\Box)\ \underline{\quad \Box B_1 \ldots \Box B_n \qquad\qquad A \qquad}\ i_1 \ldots i_n \\ \Box A \end{array}$$

com a restrição de que a premissa menor (A) não tenha a forma de nenhuma das premissas maiores($\Box B_1 \ldots \Box B_n$) da aplicação dessa regra. O problema é que um sistema com essa regra e mais as proposicionais não é equivalente ao sistema **K**. A própria regra não expressa a restrição por isso não é capaz de definir um sistema de dedução natural diferente de NS4 por si mesma. Uma introdução restrita do quadrado pode comportar o que a restrição expressa, assim propomos que **NK** seja o sistema com as regras proposicionais de NS4 mais a regra $I_r\Box$ abaixo:

---

[24] Deixamos claro que nossa preocupação é apenas com os sistemas Modais Normais mais conhecidos.

[25] O nome é idêntico ao nome do sistema de Gentzen para seu sistema de lógica clássica dedução natural, mas isso é coincidência.

[26] Uma vez que **NS4** = **T** + 4.

$$(I_r\Box)\ \dfrac{\Box B_1 \ldots \Box B_n \qquad \begin{matrix}[B_1]^{i}_{1} \ldots [B_n]^{i}_{n}\\ \vdots \\ A\end{matrix}}{\Box A}\ i_1 \ldots i_n$$

Com a restrição de que a premissa *A* dependa apenas das hipóteses da classe i. A diferença é que as hipóteses descarregadas por aplicação da regra não são mais necessitadas, assim, a premissa menor (*A*) não será da forma de nenhuma das premissas maiores ($\Box B_i$). Fazer essa mudança estrutural na regra ao invés de restringir a forma da fórmula *A*, ainda que não seja imprescindível, nos ajuda muito nos meta-teoremas de equivalência e normalização que apresentaremos. Vamos agora, observando a estrutura da prova de equivalência usada no capítulo 3, provar que K deduz os mesmos teoremas que **NK**.

Na prova que demos da equivalência entre S4 e NS4 dois foram os passos mais importantes da prova, a saber, (i) se $\Gamma \vdash_A \alpha$ então, $\Gamma \vdash_N \alpha$, e (ii) se $\Gamma \vdash_N \alpha$ então $\vdash_A \wedge\, \Gamma \to \alpha$. Onde 'A' e 'N' são sistemas axiomáticos e de Dedução Natural respectivamente. Demonstraremos esses dois teoremas para o caso de **K** e **NK**, e depois para os demais sistemas levando em conta a notação já estabelecida para Ω (que é uma derivação em um sistema axiomático) e π (que é uma dedução em um sistema de dedução natural).

i) se $\Gamma \vdash_K \alpha$ então, $\Gamma \vdash_{NK} \alpha$

Base: cd(Ω) = 1. Isto é, é uma derivação de uma linha, ou melhor, o axioma K. Nesse caso teremos a seguinte dedução em NK:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box(A \to B)]^1 \quad [\Box A]^2 \quad \dfrac{[A \to B]^3 \quad [B]^4}{B}\ E\to}{\Box B}\ I_r\Box\ 3,4}{\Box A \to \Box B}\ I\to 2}{\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)}\ I\to 1$$

Passo indutivo: cd(Ω) > 1 .Nesse caso, esta é uma seqüência de fórmulas onde qualquer uma delas é um axioma proposicional, uma instância de K ou derivada da regra RN ou MP, para os dois casos a demonstração é análoga à que aparece no caso 2 do lema 1 de 3.4.

ii) se $\Gamma \vdash_{NK} \alpha$ então $\vdash_K \wedge\, \Gamma \to \alpha$.

Base: c(π) = 1. Isto é, π tem a forma “$A \vdash_{NK} A$”, e Ω a forma “$\vdash_K A \to A$”. A prova é análoga à que aparece no caso (ii) da base de 3.2.

Passo indutivo: $c(\pi) > 1$. Assim a última fórmula pode ter sido derivada a partir das regras proposicionais, ou $I_r\Box$.

Se a última aplicação de regra é $I_r\Box$, então α tem a forma $\Box A$:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
\Gamma_1 & \Gamma_i & [\,B_1]^{k_1} \ldots [\,B_n]^{k_i} \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array} \\
(I_r\Box)\ \underline{\Box B_1 \ldots \Box B_i \qquad\qquad A} \quad k_1 \ldots k_i \\
\Box A
\end{array}$$

Pela hipótese da indução para cada dedução menor que essa, vale o teorema. Assim:

1) $\vdash_K \wedge\Gamma_1 \rightarrow \Box B_1$	Hip Ind.
.	
.	
.	
i) $\vdash_K \wedge\Gamma_n \rightarrow \Box B_n$	Hip. Ind
i+ 1) $\vdash_K (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \rightarrow A$	Hip. Ind
j) $\vdash_K (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n) \rightarrow \Box A$	RR: i + 1
k) $\vdash_K (\wedge\Gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Gamma_n) \rightarrow (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n)$	IC 1 até i
l) $(\wedge\Gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Gamma_n) \rightarrow \Box A$	SH: j, k ■

4.2.2 - ND e sua equivalência a D

O axioma D que caracteriza o sistema **D** à diferença de K e 4 tem um operador de possibilidade $\Diamond$. Para esse caso, podemos pensar no acréscimo de uma regra de introdução desse operador ou em uma eliminação restrita do $\Box$. Isto é, as regras poderiam ser uma das duas abaixo:

$$(E_r\Box)\ \frac{\Box A}{\Diamond A} \qquad\qquad (I\,\Diamond)\ \frac{A}{\Diamond A}$$

No entanto, a regra de eliminação restrita do $\Box$ ($E_r\Box$) é mais apropriada para o sistema **D**, uma vez que a introdução do ◊ (I◊) sozinha não seria suficiente para a derivação do axioma D e careceríamos da regra (E□), porém, como já vimos, essa regra é necessária para a derivação do axioma (nesse âmbito teorema) T, e aí não teríamos somente o sistema **D**, mas sim o sistema **KDT**. Então veremos os casos particulares dessa prova para a equivalência entre os sistemas **D** e ND, onde ND = NK + $E_r\Box$, pelo mesmo procedimento usado em 4.2.1.

i) se $\Gamma \vdash_D \alpha$ então, $\Gamma \vdash_{ND} \alpha$.

O caso relevante aqui é se Ω é o axioma D. Nesse caso, haverá uma dedução em ND da seguinte forma:

$$\cfrac{\cfrac{[\Box A]^1}{\Diamond A}\;E_r\Box}{\Box A \to \Diamond A}\;I\to 1$$

ii) se $\Gamma \vdash_{ND} \alpha$ então $\vdash_D \wedge\,\Gamma \to \alpha$.

O caso novo a ser considerado é: A última aplicação de regra em π é $E_r\Box$. Nesse caso a última fórmula de π tem a forma ◊ A, e a dedução tem a forma abaixo:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ . \\ . \\ \cfrac{\Box A}{\Diamond A}\;E_r\Box \end{array}$$

Pela hipótese da indução para cada dedução menor que essa, vale o teorema. Assim:

1) $\vdash \wedge\Gamma \to \Box A$ H.I

2) $\vdash \Box A \to \Diamond A$ D

3) $\vdash \wedge\,\Gamma \to \Diamond A$ S.H: 1, 2 ■

4.2.3 - NT e sua equivalência a T

Pelo que já falamos fica muito claro que o nosso sistema **NT** seja o sistema **NK** + (E□). A prova de equivalência segue o mesmo padrão das outras e é muito parecida com a do sistema **D** como veremos em seguida.

i) se $\Gamma \vdash_T \alpha$ então, $\Gamma \vdash_{NT} \alpha$.

O único caso novo é o caso onde Ω é o axioma T. Nesse caso em NT teremos a seguinte dedução:

$$\dfrac{\dfrac{[\Box A]^1}{A}\,E\,\Box}{\Box A \to A}\,1\,I\to$$

ii) se $\Gamma \vdash_{NT} \alpha$ então $\vdash_T \wedge\, \Gamma \to \alpha$.

Nos casos específicos a serem considerados em NT última fórmula pode ter sido derivada a partir das regras proposicionais, ou pelas regras $I_r\Box$ ou $E\Box$.

Caso 1: A última aplicação de regra em π é $I_r\Box$.A prova desse caso segue exatamente como no passo indutivo de ii de 4.2.1. (o sistema K)

Caso 2: A última aplicação de regra em π é $E\Box$.A prova segue como no caso 1 da hipótese da indução do lema 3.4.2.

Observação: O sistema KT contém o sistema KDT, e também aqui é possível provar que NKT contém o sistema NKDT provando que $E_r\Box$ é uma regra derivada em NKT. Abaixo podemos ver essa derivação.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box\neg A]^1}{\neg A}E\Box \qquad \dfrac{[\Box A]^2}{A}\,E\Box}{\bot}\,E\to}{\neg\Box\neg A}\,I\to\,1$$

Temos que de $\Box A$ obtemos $\neg\Box\neg A$, que por definição é $\Diamond A$, e dessa forma temos que de $\Box A$ obtemos $\Diamond A$ que é justamente o que faz a regra $E_r\,\Box$.

4.2.4 - NK4 e sua equivalência a K4

Fica fácil ver que os axiomas de **K4** seriam facilmente derivados em um sistema com as regras $I\Box$ e $I_r\Box$. No entanto, as duas regras podem ser condensadas em uma só como vemos abaixo:

$$
\begin{array}{c}
\Gamma_1 \quad \Gamma_i \qquad [\Box B_1]^{k_1}\,[B_1]^{k_1} \ldots [\Box B_n]^{k_i}[B_n]^{k_i}\\
\vdots \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
(I_d\Box)\ \dfrac{\Box B_1 \ldots \Box B_i \qquad\qquad\qquad A}{\Box A}\ k_1 \ldots k_i
\end{array}
$$

Temos **NK4** somente com essa regra e as regras proposicionais, podemos nos referir a essa regra como “introdução dupla do □”. Abaixo a equivalência entre os sistemas.

i) se $\Gamma \vdash_{K4} \alpha$ então, $\Gamma \vdash_{NK4} \alpha$.

Aqui devemos levar em consideração dois casos.

Caso 1: Quando Ω é o axioma K. Nesse caso teremos a seguinte dedução em **NK4**:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box (A \to B)]^1 \quad [\Box A]^2 \qquad \dfrac{[\Box(A \to B)]^3\,[A \to B]^3 \quad [\Box B]^4\,[B]^4}{B}\ E\to}{\Box B}\ I_r\Box\ 3,4}{\Box A \to \Box B}\ I\to 2}{\Box (A \to B) \to (\Box A \to \Box B)}\ I\to 1
$$

Caso 2: Ω é o axioma 4. Em **NK4** há uma derivação como a seguinte:

$$
\dfrac{\dfrac{[\Box A]^2 \qquad [\Box A]^1\,[A]^1}{\Box\Box A}\ I_i\Box\ 1}{\Box A \to \Box\Box A}\ I\to\ 2
$$

ii) se $\Gamma \vdash_{NK4} \alpha$ então $\vdash_{K4} \wedge\, \Gamma \to \alpha$.

Trataremos o caso onde a última fórmula da dedução é derivada a partir da regra $I_d\Box$.

Se α é derivada por $I_d\Box$ a dedução π tem a seguinte forma:

$$
\begin{array}{c}
\Gamma_1 \quad \Gamma_n \qquad [\Box B_1]^{i_1}\,[B_1]^{i_1} \ldots [\Box B_n]^{i_n}[B_n]^{i_n}\\
\vdots \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
(I_d\Box)\ \dfrac{\Box B_1 \ldots \Box B_n \qquad\qquad\qquad A}{\Box A}\ i_1 \ldots i_n
\end{array}
$$

Assim teremos a seguinte derivação em K4:

1) $\vdash_{K4} \wedge \Gamma_1 \to \Box B_1$ Hipótese de indução

.

.

i) $\vdash_{K4} \wedge \Gamma_i \to \Box B_i$ Hip. Ind

i + 1) $\vdash_{K4} (\Box B_1 \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i \wedge B_i) \to A$ Hip. Ind

j) $\vdash_{K4} \Box(\Box B_1 \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i \wedge B_i) \to \Box A$ RM: i + 1

j + 1) $\vdash_{K4} (\wedge\Gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Gamma_i) \to (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i)$ IC: 1 até i

k) $\vdash_{K4} (\Box\Box B_1 \wedge \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_i \wedge \Box B_i) \to \Box(\Box B_1 \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i \wedge B_i)$ instância de K2

k + 1) $\vdash_{K4} (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i) \to (\Box\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_i)$ i aplicações do axioma 4 + IC

k + 2) $\vdash_{K4} (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i) \to (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i)$ $\alpha \vdash \alpha$

k + 3) $\vdash_{K4} (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i) \to ((\Box\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_i) \wedge (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i))$ Ral1: k + 1, k + 2

k + 4) $\vdash_{K4} ((\Box\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_i) \wedge (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i)) \to (\Box\Box B_1 \wedge \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_i \wedge \Box B_i)$ comut.

k + 5) $\vdash_{K4} (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i) \to (\Box\Box B_1 \wedge \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_i \wedge \Box B_i)$ SH: k + 3, k + 4

l) $\vdash_{K4} (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i) \to \Box(\Box B_1 \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i \wedge B_i)$ SH: k, k + 5

m) $\vdash_{K4} (\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_i) \to \Box A$ SH: l, j

n) $\vdash_{K4} (\wedge\Gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Gamma_i) \to \Box A$ SH: m, j +1

■

4.2.5 - B e sua equivalência a NB

Apresentamos abaixo a regra de introdução do operador □ no sistema **B**, chamemos essa regra de $I_B\Box$. Observemos que a partir desse sistema usaremos mais de um tipo de fórmula como premissa da regra, isto é, permitiremos agora como premissas mais do que somente as fórmulas da forma $\Box\alpha$ fórmulas sem o operador de necessidade.

$$(I_B\Box)\ \dfrac{\begin{array}{cccccccc} \Gamma_1 & & \Gamma_n & \Gamma_{n+1} & & \Gamma_m & & [A_1]^{i}_{1}\ldots[A_n]^{i}_{n}\ [\neg\Box\neg B]^{i}_{n+1}\,[\neg\Box\neg B]^{i}_{m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Box A_1 & \ldots & \Box A_n & B_1 & \ldots & B_m & & C \end{array}}{\Box C}\ i_1\ldots i_m$$

Restrição: Todas as premissas da classe i são descarregadas na aplicação da regra.

Além da regra $I_B\Box$ acrescentaremos a regra E□ e a regra Df◊ que funcionará em **NB** como a nossa definição do operador ◊. A regra Df◊ é:

$$\text{Df}\Diamond\ \frac{\Diamond \mathrm{A}}{\neg\Box\neg A} \qquad \text{ou} \qquad \text{Df}\Diamond\ \frac{\neg\Box\neg \mathrm{A}}{\Diamond A}$$

i) se $\Gamma \vdash_{B} \alpha$ então, $\Gamma \vdash_{NB} \alpha$.

Aqui temos um caso novo em relação a **NT** para levar em consideração.

Quando Ω é o axioma B. Nesse caso teremos a seguinte dedução em **NB**:

$$\dfrac{\dfrac{[B]^2 \qquad \dfrac{[\neg\Box\neg B]^1}{\Diamond B}\ \text{Df}\Diamond}{\Box\Diamond B}\ 1\ \text{I}_{B}\Box}{B \to \Box\Diamond B}\ 2\ \text{I}{\to}$$

ii) se $\Gamma \vdash_{NB} \alpha$ então $\vdash_{B} \wedge\, \Gamma \to \alpha$.

Trataremos o caso onde a última fórmula da dedução é derivada a partir da regra $\text{I}_{B}\Box$.

Se α é derivada por $\text{I}_{B}\Box$ a dedução π, simplificada para o caso onde a regra tem somente duas premissas, tem a seguinte forma:

$$
(I_B\Box)\ \dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 & [A]^1\ \ [\neg\Box\neg B]^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Box \mathrm{A} & B & C\end{matrix}}{\Box C}\ i_1\ldots i_m
$$

Quando esse é o caso temos a seguinte derivação em **B**:

1 $\vdash \Gamma_1 \to \Box A$	Hip. Indução
2 $\vdash \Gamma_2 \to B$	Hip. Indução
3 $\vdash (A \wedge \neg\Box\neg B) \to C$	Hip. Indução
4 $\vdash \Box(A \wedge \neg\Box\neg B) \to \Box C$	RM
5 $\vdash (\Gamma_1 \wedge \Gamma_2) \to (\Box A \wedge B)$	IC: 1, 2
6 $\vdash (\Box A \wedge B) \to B$	AX: 5 (proposicional)
7 $\vdash B \to \Box\Diamond B$	AX: B
8 $\vdash B \to \Box\neg\Box\neg B$	Df◊
9 $\vdash (\Box A \wedge B) \to \Box\neg\Box\neg B$	SH: 6, 8
10 $\vdash (\Box A \wedge B) \to \Box A$	AX: 4 (proposicional)
11 $\vdash (\Box A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box\neg\Box\neg B)$	Ral1: 9, 10
12 $\vdash (\Box A \wedge \Box\neg\Box\neg B) \to \Box(A \wedge \neg\Box\neg B)$	K2
13 $\vdash (\Gamma_1 \wedge \Gamma_2) \to \Box(A \wedge \neg\Box\neg B)$	SH: 5, 11, 12
14 $\vdash (\Gamma_1 \wedge \Gamma_2) \to \Box C$	SH: 13, 4 ■

4.2.6 - S5 e sua equivalência a NS5.

Para o sistema NS5, como nos outros sistemas, usaremos de uma nova regra de introdução do operador □. Como tal regra permite um uso de uma quantidade maior de formas de fórmulas entre suas premissas vamos nomeá-la de “introdução irrestrita do □” ou simplesmente $I_i\Box$.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \Gamma_n & [\,\alpha_1\,]^{i}_{1} \dots [\,\alpha_n\,]^{i}_{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \\ I_i\Box)\ \dfrac{\alpha_1 \dots \alpha_n \qquad \beta}{\Box\,\beta}\ i_1 \dots i_n \end{array}$$

Restrição: Onde cada α_i é uma fórmula do tipo $\Box A_i$ ou $\neg\Box A_i$.

Além da regra $I_i\Box$ e da regra $E\Box$, acrescentaremos a regra $Df\Diamond$ como em **NB**.

Faremos essa prova de uma forma um pouco mais detalhada que as anteriores.

i) se $\Gamma \vdash_{S5} \alpha$ então, $\Gamma \vdash_{NS5} \alpha$.

Base: “$\Gamma \vdash_{S5} \alpha$” tem comprimento igual a 1. Isto é, é uma derivação de uma linha, ou melhor, senão é um axioma proposicional é o axioma K, T ou o axioma 5.

Caso 1: No caso de ser o axioma K.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Box\alpha]^3 \qquad [\,\Box\,(\alpha\to\beta)]^4 \qquad \dfrac{\dfrac{[\Box(\alpha\to\beta)]^1}{\alpha\to\beta}\,E\Box \qquad \dfrac{[\Box\,\alpha]^2}{\alpha}\,E\Box}{\beta}\,E{\to}}{\Box\,\beta}\,I\,\Box\ 1{,}2}{\Box\alpha\to\Box\beta}\,I{\to}\ 3}{\Box(\alpha\to\beta)\to(\,\Box\alpha\to\Box\beta)}\,I{\to}\ 4$$

Caso 2: No caso de ser o axioma T segue exatamente como no sistema T.

Caso 3: No caso de ser o axioma 5 α tem a forma $\Diamond A\to\Box\Diamond A$ e nós temos a seguinte derivação em NS5.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Diamond A]^1}{\neg\Box\neg A}\,Df\Diamond \qquad \dfrac{[\neg\Box\neg A]^2}{\Diamond\,A}\,Df\Diamond}{\Box\,\Diamond\,A}\,I_i\Box\ 1}{\Diamond A\to\Box\Diamond A}\,I{\to}\ 2$$

Passo indutivo: “$\Gamma \vdash_{S5} \alpha$” tem comprimento maior que 1. Segue como no caso de K.

ii) se $\Gamma \vdash_{NS5} \alpha$ então $\vdash_{S5} \wedge\,\Gamma \to \alpha$.

Antes de mais nada provaremos alguns teoremas em S5 que nos serão úteis:

Definição do $\Box$ por $\Diamond$ (Df$\Box$): $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$

1) $\vdash \Diamond\neg A \leftrightarrow \neg\Box\neg\neg A$	Df$\Diamond$
2) $\vdash \Box\neg\neg A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$	CP: 1
3) $\vdash A \leftrightarrow \neg\neg A$	DN
4) $\vdash \Box A \leftrightarrow \Box\neg\neg A$	RM: 3
5) $\vdash \Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$	SH: 2, 4

Transformação dos operadores:

1) $\vdash \Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$	Df$\Box$
2) $\vdash \neg\Box A \leftrightarrow \Diamond\neg A$	CP: 1

Teorema T$\Diamond$:

1) $\vdash \Box\neg A \rightarrow \neg A$	Ax: T
2) $\vdash A \rightarrow \neg\Box\neg A$	CP: 1
3) $\vdash \Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$	Df$\Diamond$
4) $\vdash A \rightarrow \Diamond A$	SH: 2, 3

Teorema 5$\Diamond$:

1) $\vdash \Diamond\Box A \leftrightarrow \neg\Box\neg\Box A$	Df$\Diamond$
2) $\vdash \Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$	Df$\Box$
3) $\vdash \Diamond\neg A \rightarrow \neg\Box A$	Transformação dos operadores
4) $\vdash \Box (\Diamond\neg A \rightarrow \neg\Box A)$	RN: 3
5) $\vdash \Box (\Diamond\neg A \rightarrow \neg\Box A) \rightarrow (\Box \Diamond\neg A \rightarrow \Box \neg\Box A)$	Ax. K
6) $\vdash \Box \Diamond\neg A \rightarrow \Box \neg\Box A$	MP: 4, 5
7) $\vdash \neg\Box\neg\Box A \rightarrow \neg\Box\Diamond\neg A$	CP: 6
8) $\vdash \Diamond\Box A \rightarrow \neg\Box\Diamond\neg A$	SH: 1, 7
9) $\vdash \Diamond\neg A \rightarrow \Box\Diamond\neg A$	Ax. 5
10) $\vdash \neg\Box\Diamond\neg A \rightarrow \neg\Diamond\neg A$	CP: 9
11) $\vdash \Diamond\Box A \rightarrow \neg\Diamond\neg A$	SH: 8, 10
12) $\vdash \Diamond\Box A \rightarrow \Box A$	SH: 11, 2

Teorema 4:

1) $\vdash \Box A \rightarrow \Diamond\Box A$	T$\Diamond$
2) $\vdash \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond\Box A$	Ax. 5
3) $\vdash \Box A \rightarrow\Box\Diamond\Box A$	SH: 1, 2
4) $\vdash \Diamond\Box A \rightarrow \Box A$	5$\Diamond$
5) $\vdash \Box(\Diamond\Box A \rightarrow \Box A)$	RN: 4
6) $\vdash \Box(\Diamond\Box A \rightarrow \Box A) \rightarrow (\Box\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Box A)$	Ax. K
7) $\vdash \Box\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Box A$	MP: 5, 6
8) $\vdash \Box A \rightarrow \Box\Box A$	SH: 3, 7

Voltemos à prova de (ii).

Base: como nos casos anteriores. É suficiente demonstrar $\vdash_{S5} \alpha \to \alpha$

Passo indutivo: "$\Gamma \vdash_{NS5} \alpha$" tem comprimento maior que 1. Assim a última fórmula pode ter sido derivada a partir das regras proposicionais, ou $I_i\Box$ ou $E\Box$.

Caso 1. E □ seque como no caso de T.

Caso 2. I_i □. Essa dedução tem a seguinte forma em NS5:

$$(I_i\Box)\ \dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_n \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_1 & \dots\ \alpha_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\,\alpha_1\,]^{i}_{1}\dots[\,\alpha_n\,]^{i}_{n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta\end{matrix}}{\Box\,\beta}\ i_1\dots i_n$$

Temos dois possíveis casos aqui, ou bem qualquer fórmula α_i é da forma $\neg\Box A_i$, ou é da forma $\Box A_i$.

Pela hipótese de indução o teorema vale para as deduções menores, assim temos:

De modo simplificado.

1) $\vdash \wedge\, \Gamma_1 \to \alpha_1$
2) $\vdash \wedge\, \Gamma_2 \to \alpha_2$
3) $\vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2) \to \beta$

Três casos são possíveis para as premissas α_1 e α_2.

Caso 1: α_1 e α_2 são da forma $\Box A_1$ e $\Box A_2$. Assim temos a seguinte dedução:

1) $\vdash \wedge\, \Gamma_1 \to \Box A_1$	Hip. Ind.
2) $\vdash \wedge\, \Gamma_2 \to \Box A_2$	Hip. Ind.
3) $\vdash (\Box A_1 \wedge \Box A_2) \to \beta$	Hip. Ind.
4) $\vdash \Box\,(\Box A_1 \wedge \Box A_2) \to \Box\,\beta$	RM em 3
5) $\vdash \Box A_1 \to \Box\Box A_1$	Ax. 4 Modal
6) $\vdash \Box A_2 \to \Box\Box A_2$	Ax. 4 Modal
7) $\vdash (\Box A_1 \wedge \Box A_2) \to (\Box\Box A_1 \wedge \Box\Box A_2)$	IC: 5, 6
8) $\vdash (\Box\Box A_1 \wedge \Box\Box A_2) \to \Box(\Box A_1 \wedge \Box A_2)$	K2
9) $\vdash (\wedge\Gamma_1 \wedge \wedge\, \Gamma_2) \to (\Box A_1 \wedge \Box A_2)$	IC: 1,2
10) $\vdash (\wedge\Gamma_1 \wedge \wedge\, \Gamma_2) \to \Box(\Box A_1 \wedge \Box A_2)$	SH: 7 a 9
11) $\vdash (\wedge\Gamma_1 \wedge \wedge\, \Gamma_2) \to \Box\,\beta$	SH: 10, 4

Caso 2: α_1 e α_2 tem as formas $\neg\Box A_1$ e $\neg\Box A_2$.

1) $\vdash \wedge\, \Gamma \to \neg\Box\, A_1$	Hip. Ind

2) $\vdash\ \wedge \Gamma \rightarrow \neg\Box A_2$	Hip. Ind
3) $\vdash (\neg\Box A_1 \wedge \neg\Box A_2) \rightarrow \beta$	Hip. Ind
4) $\vdash \Box (\neg\Box A_1 \wedge \neg\Box A_2) \rightarrow \Box\beta$	RM: 3
5) $\vdash\ \neg\Box A_1 \rightarrow \Diamond\neg A_1$	Transformação Dos operadores
6) $\vdash\ \Diamond\neg A_1 \rightarrow \neg\Box A_1$	Transformação Dos operadores
7) $\vdash\ \Diamond\neg A_1 \rightarrow \Box\Diamond\neg A_1$	Ax. 5
8) $\vdash\ \Box\Diamond\neg A_1 \rightarrow \Box\neg\Box A_1$	RM: 6
9) $\vdash\ \neg\Box A_1 \rightarrow \Box\neg\Box A_1$	SH: 5, 7 e 8
10) $\vdash\ \neg\Box A_2 \rightarrow \Diamond\neg A_2$	Transformação Dos operadores
11) $\vdash\ \Diamond\neg A_2 \rightarrow \neg\Box A_2$	Transformação Dos operadores
12) $\vdash \Diamond\neg A_2 \rightarrow \Box\Diamond\neg A_2$	Ax. 1
13) $\vdash\ \Box\Diamond\neg A_2 \rightarrow \Box\neg\Box A_2$	RM: 11
14) $\vdash\ \neg\Box A_2 \rightarrow \Box\neg\Box A_2$	SH: 10, 12 e 13
15) $\vdash (\neg\Box A_1 \wedge \neg\Box A_2) \rightarrow (\Box\neg\Box A_1 \wedge \Box\neg\Box A_2)$	IC: 9, 14
16) $\vdash (\Box\neg\Box A_1 \wedge \Box\neg\Box A_2) \rightarrow \Box (\neg\Box A_1 \wedge \neg\Box A_2)$	K2
17) $\vdash (\wedge\Gamma_1 \wedge \wedge \Gamma_2) \rightarrow (\neg\Box A_1 \wedge \neg\Box A_2)$	IC: 1 , 2
18) $\vdash (\wedge\Gamma_1 \wedge \wedge \Gamma_2) \rightarrow \Box (\neg\Box A_1 \wedge \neg\Box A_2)$	SH: 15, 16 e 17
19) $\vdash (\wedge\Gamma_1 \wedge \wedge \Gamma_2) \rightarrow \Box \beta$	SH: 18 , 4

Caso 3: α_1 tem a forma $\neg\Box A_1$ e α_2 tem a forma $\Box A_2$.

1) $\vdash \wedge \Gamma_1 \rightarrow \neg\Box A_1$	Hip Ind
2) $\vdash\ \wedge \Gamma_2 \rightarrow \Box A_2$	Hip. Ind
3) $\vdash (\neg\Box A_1 \wedge \Box A_2) \rightarrow \beta$	Hip. Ind
4) $\vdash \Box(\neg\Box A_1 \wedge \Box A_2) \rightarrow \Box\beta$	RM 3
5) $\vdash\ \neg\Box A_1 \rightarrow \Diamond\neg A_1$	Transf. Dos operadores
6) $\vdash\ \Diamond\neg A_1 \rightarrow \neg\Box A_1$	Transf. Dos operadores
7) $\vdash \Diamond\neg A_1 \rightarrow \Box\Diamond\neg A_1$	Ax. 5
8) $\vdash\ \Box\Diamond\neg A_1 \rightarrow \Box\neg\Box A_1$	RM: 6
9) $\vdash\ \neg\Box A_1 \rightarrow \Box\neg\Box A_1$	SH: 5, 7 e 8
10) $\vdash \Box A_2 \rightarrow \Box\Box A_2$	Ax. 4
11) $\vdash (\neg\Box A_1 \wedge \Box A_2) \rightarrow (\Box\neg\Box A_1 \wedge \Box\Box A_2)$	IC: 9, 10
12) $\vdash (\Box\neg\Box A_1 \wedge \Box\Box A_2) \rightarrow \Box(\neg\Box A_1 \wedge \Box A_2)$	K2
13) $\vdash (\wedge\Gamma_1 \wedge \wedge \Gamma_2) \rightarrow (\neg\Box A_1 \wedge \Box A_2)$	IC: 1, 2
14) $\vdash (\wedge\Gamma_1 \wedge \wedge \Gamma_2) \rightarrow \Box(\neg\Box A_1 \wedge \Box A_2)$	SH: 11, 12 e 13
15) $\vdash\ (\wedge\Gamma_1 \wedge \wedge \Gamma_2) \rightarrow \Box\beta$	SH: 4, 14

■

Devemos destacar aqui três características desejáveis para os sistemas em dedução natural apresentados acima. Primeiro, é necessário que cada um dos sistemas seja equivalente ao seu análogo axiomático, sem essa característica as outras nem chegam a fazer sentido em nosso projeto. Nessa etapa os sistemas já foram aprovados como foi possível ver no capítulo que aqui se encerra. Em segundo lugar, desejamos um método único, onde as regras de um sistema fossem, tanto quanto possível, similares umas as de outro, e que possamos manter o padrão para a hierarquia dos sistemas modais mais importantes de K a GL. Nossas regras são similares no sentido de que todas descarregam hipóteses em um conjunto de premissas, tudo que muda nessas regras são restrições que dizem respeito a que forma devem ter essas premissas e esse conjunto de hipóteses. Nesse ponto também obtemos êxito, como pode-se ver ao observar as regras de nossos sistemas. Em terceiro lugar desejamos que nossos sistemas sejam relevantes do ponto de vista meta-teorético, e para tanto é importante que nossos sistemas sejam normalizáveis. Escolhemos o sistema K, que é base de todos os outros para apresentar esse primeiro esquema de prova de normalização. A prova da normalização de K embora não seja uma prova de que todos os nossos sistemas têm as as propriedades que desejamos é um esboço para as provas dos outros sistemas.

5 Normalização no sistema NK

Vamos definir o sistema NK como o sistema tendo o conjunto das regras proposicionais E$\vee$, I$\vee$, E$\wedge$, I$\wedge$, E$\rightarrow$,I$\rightarrow$ e $\bot_c$ apesentadas em 2.2 mais a regra $I_r\Box$ que apresentamos logo abaixo:

$$(I_r\Box)\ \dfrac{\Box B_1 \ldots \Box B_n \qquad \begin{matrix}[B_1]^{k}_{1} \ldots [B_n]^{k}_{n}\\ \cdot \\ \cdot \\ A\end{matrix}}{\Box A}\ k_1 \ldots k_n$$

Com a restrição similar à restrição na regra I$\Box$ de que: toda ocorrência de hipóteses na classe $[B_k]^{i}_{k}$, $1 \leq k \leq n$, deve ser descarregada pela aplicação da regra. Além disso a premissa A não deve depender de qualquer hipótese que não seja uma daquelas que ocorrem na classe de hipóteses em questão. Quanto à notação $[B_k]^{j}_{k}$ precisamos esclarecer que: B_k é a representação de uma ocorrência de fórmula, o subscrito 'k' rotula a hipótese específica em questão, e o sobrescrito 'j' a classe de hipóteses.

O sistema NK comporta as mesmas definições apresentadas para fórmula, sub-fórmula, grau de uma fórmula e árvore de fórmulas apresentadas em Prawitz, as cláusulas i, ii, iii e iv da definição de dedução de Medeiros e mais a seguinte cláusula:

$$\text{v) } \pi \text{ é } \dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1\\ \pi_1\\ \Box B_1\end{matrix}\ \ \begin{matrix}\Gamma_2 \ldots\\ \pi_2\\ \Box B_2\end{matrix}\ \ \begin{matrix}\Gamma_n\\ \pi_n\\ \Box B_n\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[B_1]^{k}_{1}\ [B_2]^{k}_{2} \ldots [B_n]^{k}_{n}\\ \pi_{n+1}\\ C\end{matrix}}{\Box C}\ r, k \qquad \text{onde, } \begin{matrix}\Gamma_1\\ \pi_1\\ \Box B_1\end{matrix}\ \ \text{a}\ \ \begin{matrix}[B_1\ B_2 \ldots B_n]\\ \pi_{n+1}\\ C\end{matrix}$$

são deduções, r é uma aplicação de $I_r\Box$, $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ é o conjunto das hipóteses descarregadas em função de r e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \ldots \Gamma_n$.

Definição 5.1: As fórmulas $\Box B_1 \ldots \Box B_n$ de $I_r\Box$ são premissas maiores e C é a premissa menor da aplicação dessa regra.

Definição 5.2. Um **ramo** em uma dedução π em NK é uma seqüência $A_1, \ldots, A_n$ de ocorrência de fórmulas tal que :

(i) A_1 é uma hipótese que não é descarregada por aplicação de E$\vee$ e nem $I_r\Box$;

(ii) Para todo $i < n$, A_i não é uma premissa menor de E$\rightarrow$ e,

a) Se A_i não é uma premissa maior de E∨ nem de $I_r\Box$, então A_{i+1} é a fórmula que ocorre imediatamente abaixo de A_i;

b) Se A_i é uma premissa maior de E∨ ou de $I_r\Box$, então A_{i+1} é uma hipótese descarregada pela aplicação de E∨ ou $I_r\Box$ em questão.

(iii) A_n é uma premissa menor de E→ , a fórmula final de uma dedução, ou ainda uma premissa maior de aplicação de E∨ que não descarrega qualquer hipótese.

Observação 5.3. Nesse caso a definição de segmento maximal é desnecessária em NK, pois se todas as deduções podem ser simplificadas e as aplicações da regra $I_r\Box$ não geram segmentos, então não há casos de seqüências de fórmulas iguais cuja primeira fórmula seja conclusão de regra de introdução e a última premissa maior de regra de eliminação. Não é difícil perceber isso. Tomemos NS4 como base. Nesse sistema apenas as aplicações das regras I□ e E∨ eram responsáveis por gerar segmentos maximais. Contudo, em NS4 e também em nosso sistema vale o lema da simplificação. Por essa razão, toda dedução com aplicações da regra E∨ pode ter somente fórmulas do tipo (⊥) como conclusão e tais fórmulas são obtidas apenas por regras de eliminação. No caso da regra $I_r\Box$ (que é nossa versão de I□) vemos pela definição de ramo que se ($\Box A$) é obtida por uma regra de introdução e premissa maior da regra $I_r\Box$, então a fórmula seguinte a ($\Box A$) no ramo é a fórmula (A), que tem a forma diferente da primeira, e por isso as duas não formam um segmento.

Definição 5.4. Dizemos que A é uma **Fórmula maximal** se é a conclusão de uma aplicação de I-regra ou $\bot_c$, e é premissa maior de uma aplicação de regra de eliminação ou $I_r\Box$.

Definição 5.5. O **grau de uma dedução π**, g(π), é o maior grau entre as fórmulas maximais de π. Se π não tem fórmulas maximais então g(π) = 0.

Definição 5.6. O **índice** de uma dedução π é $I(\pi) = \langle d, s\rangle$, onde d = g(π) e 's' é a soma das fórmulas maximais de π cujo grau é d. Se π não tem fórmulas maximais então $I(\pi) = \langle 0, 0\rangle$.

Definição 5.7. Se $I(\pi) = \langle d, s\rangle$ e $I(\pi') = \langle d', s'\rangle$ então, $I(\pi') < I(\pi)$ se e somente se ou $d' < d$ ou $d' = d$ e $s' < s$.

Definição 5.8.. Uma **dedução crítica** em NK é uma dedução π tal que, se $g(\pi) = d$ então a última inferência de π tem uma premissa maximal de grau d, e para toda subderivação Σ de π, $g(\Sigma) < g(\pi)$.

Definição 5.9. Uma dedução π é uma **dedução normal** se π não tem fórmulas maximais, isso é, $I(\pi) = \langle 0, 0\rangle$.

Lema 5.10. (lema crítico): Se π é uma derivação crítica simplificada (como é definida no capítulo 2) de C a partir de Γ, então π pode ser transformada em uma derivação simplificada π' tal que $I(\pi') < I(\pi)$.

Prova: sejam $I(\pi) = \langle d, s\rangle$, r a última inferência de π e F uma das premissas maximais de r tal que $g(F) = d$. Mostraremos que π pode ser transformada em uma derivação π' tal que $I(\pi') < I(\pi)$.

Caso (1) F é conclusão de uma aplicação de regra de introdução.

Caso 1.1 ($I_r\Box$) r é uma aplicação da regra $I_r\Box$ e F é conclusão da regra $I_r\Box$.

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Box A_1\end{array}\ \dots\ \begin{array}{c}\Sigma_m\\ \Box A_m\end{array}\qquad \begin{array}{c}[A_1]^{i_1}\dots[A_n]^{i_m}\\ \Sigma_{m+1}\\ B\end{array}}{\Box B}\,I\Box\ i_1\dots i_m \qquad \begin{array}{c}\Lambda_1\\ \Box B_1\end{array}\dots\begin{array}{c}\Lambda_n\\ \Box B_n\end{array}\qquad \begin{array}{c}[B]^{j_0}\,[B_1]^{j_1}\dots[B_n]^{j_n}\\ \Lambda_{n+1}\\ C\end{array}}{\Box C}\,I\Box\ j_0\dots j_n$$

É transformado em:

$$\pi' = \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Box A_1\end{array}\dots\begin{array}{c}\Sigma_m\\ \Box A_m\end{array}\quad \begin{array}{c}\Lambda_1\\ \Box B_1\end{array}\dots\begin{array}{c}\Lambda_n\\ \Box B_n\end{array}\qquad \begin{array}{c}\begin{array}{c}[A_1]^{i_1}\dots[A_n]^{i_m}\\ \Sigma_{m+1}\\ [B]\end{array}\quad [B_1]^{j_1}\dots[B_n]^{j_n}\\ \Lambda_{n+1}\\ C\end{array}}{\Box C}\,I\Box\ i_1\dots i_m, j_1\dots j_n$$

Se nenhuma fórmula entre $\Box A_1$ e $\Box B_n$ tiver o mesmo grau de $\Box B$ então $d < d'$, caso exista a tal fórmula $d = d'$ e $s < s'$. Dessa forma, em qualquer caso $I(\pi') < I(\pi)$

Caso (2) F é conclusão de $\bot_c$ e π é a seguinte árvore

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg F]^{i}\\ \Sigma_0\\ \bot\end{array}}{F}\,i \qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ H_1\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ H_{n+1}\end{array}}{C}\,r$$

Como já vimos no capítulo 2 a subderivação Σ_0 pode ser transformada na árvore abaixo por aplicação dos lemas 2.17, 2.18, 2.19 e 2.20 apresentados naquele capítulo.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_{0,1}\\ F\end{array}\qquad [\neg F]^{i}}{[\bot]}\\ \Sigma'_{0,2}\\ \bot\end{array}$$

Registramos aqui que a fórmula ($\bot$) conclusão da regra E→ terá tantas cópias quantas forem as ocorrências da fórmula ($\neg F$), premissa maior de aplicação da regra, o que aqui está indicada pelo uso dos colchetes. Substituindo Σ_0 em π temos a seguinte dedução π_1:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_{0,1}\\ F\end{array}\qquad [\neg F]^{i}}{[\bot]}\\ \Sigma'_{0,2}\\ \bot\end{array}}{F}\,i \qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ H_1\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ H_{n+1}\end{array}}{C}\,r$$

Como pode-se ver, a fórmula ($\neg F$), premissa maior de regra de E→, em Σ_0 não é descarregada em Σ_0, mas apenas em π_1. Como notou Yuuki a fórmula ($\neg F$) pode ocorrer diversas vezes em Σ_0. Pensando nesse caso, suponhamos que Σ_0 tenha um certo número *n* de fórmulas não descarregadas do tipo ($\neg F$) como no exemplo abaixo:

$$\begin{array}{c}\mathfrak{I}_1\ \dfrac{\begin{array}{c}{\Sigma'_{0,1}}^{1}\\ F\end{array}\quad [\neg F]^{i}}{\bot} \quad \ldots \quad \mathfrak{I}_n\ \dfrac{\begin{array}{c}{\Sigma'_{0,1}}^{n}\\ F\end{array}\quad [\neg F]^{i}}{\bot}\\ \Sigma_{0,2}\\ \bot\end{array}$$

Mais detalhadamente π_1 tem a seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{I}_1\,\dfrac{\overset{\Sigma'^{\,1}_{0,1}}{F}\qquad[\neg F]^{i}}{\bot}\quad\ldots\quad\mathfrak{I}_n\,\dfrac{\overset{\Sigma'^{\,n}_{0,1}}{F}\qquad[\neg F]^{i}}{\bot}\\ \Sigma_{0,2}\\ \bot\end{array}}{F}\qquad\qquad\overset{\Sigma_1}{H_1}\ldots\overset{\Sigma_{n+1}}{H_{n+1}}}{C}\;r$$

(2.1) A fórmula final de $\Sigma_{0,1}$ não é conclusão de uma regra de introdução.

a) A fórmula C em π_1 é da forma $\bot$. Nesse caso π_1 é transformada na seguinte dedução π_2 :

$$\begin{array}{c}\mathfrak{I}_1\,\dfrac{\overset{\Sigma'^{\,1}_{0,1}}{F}\qquad\overset{\Sigma^{1}_{1}}{H_1}\ldots\overset{\Sigma^{1}_{n+1}}{H_{n+1}}}{\bot}\;r\;\ldots\;\mathfrak{I}_n\,\dfrac{\overset{\Sigma'^{\,n}_{0,1}}{F}\qquad\overset{\Sigma^{n}_{1}}{H_1}\ldots\overset{\Sigma^{n}_{n+1}}{H_{n+1}}}{\bot}\;r\\ \Sigma_{0,2}\\ \bot\end{array}$$

Chamaremos esse procedimento de transformação de T$\mathfrak{I}$.

b) A fórmula C em π_1 é de uma forma distinta de $\bot$. Nesse caso π_2 é a dedução abaixo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{I}_1\,\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma'^{\,1}_{0,1}}{F}\qquad\overset{\Sigma_{1}}{H_1}\ldots\overset{\Sigma^{1}_{n+1}}{H_{n+1}}}{C}\;r\qquad[\neg C]^{1}}{\bot}\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;\mathfrak{I}_n\,\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma'^{\,n}_{0,1}}{F}\qquad\overset{\Sigma^{n}_{1}}{H_1}\ldots\overset{\Sigma^{n}_{n+1}}{H_{n+1}}}{C}\;r\qquad[\neg C]^{1}}{\bot}\\ \Sigma_{0,2}\\ \bot\end{array}}{C}\;i$$

Chamaremos esse procedimento de transformação de T$\mathfrak{I}$'.

Tanto em (a) quanto em (b) o índice de π_2 pode ter sofrido um aumento considerável de fórmulas maximais em relação a π, se levarmos em conta que pode existir alguma fórmula H_i tal que $g(H_i) = g(F)$. Nesse caso, se a última inferência de Σ_i é uma aplicação de I- regra, um número n de reduções na fórmula H_i transformará a dedução π_2 em uma dedução π' e $I(\pi') < I(\pi_2)$. Caso a última inferência em Σ_i seja uma aplicação da regra $\bot_c$, π_2 deve passar por um dos procedimentos de transformação acima (π_2 >> T$\mathfrak{I}$ ou π_2 >> T$\mathfrak{I}$'), para que possamos reduzir cada fórmula H_i em $\mathfrak{I}_i$. Como existe um número finito n de fórmulas H_i, por n transformações como essa obtemos uma dedução π_3 e se H_i é a única fórmula de grau igual ao grau de *F* então $\pi_3 = \pi'$, caso contrário o número de fórmulas maximais mais uma vez aumenta com relação à dedução π_2, mas por um número finito de transformações como as feitas acima também obtemos uma dedução π_n tal que $g(\pi_n) < g(\pi_{n-1})$. Por fim, uma vez que $g(\pi) = g(\pi_{n-1})$ e $g(\pi_n) < g(\pi_{n-1})$ determinamos que $\pi_n = \pi'$ e temos que $I(\pi') < I(\pi)$.

2.2) r é ($I_r\Box$), t é ($I_r\Box$) e *F* é da forma $\Box B$.

$$\pi_1 = \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Lambda_1\\ \Box A_1\end{matrix}\ \ldots\ \begin{matrix}\Lambda_m\\ \Box A_m\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[A_1]^{i}_{1}\ldots[A_m]^{i}_{m}\\ \Lambda_{m+1}\\ B\end{matrix}}{\Box B}\,t, i_1, \ldots, i_m\qquad [\neg\Box B]^{j}}{\bot}\,E\to\\ \Sigma'_{0,2}\\ \dfrac{\bot}{\Box B}\,j\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ [\Box B_1]\end{matrix}\ldots\begin{matrix}\Sigma_n\\ [\Box B_n]\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[B]^{j}_{0}\,[B_1]^{j}_{1}\ldots[B_n]^{j}_{n}\\ \Sigma_{n+1}\\ C\end{matrix}}{\Box C}\,r, j_0, j_1, \ldots, j_n$$

Σ_0 é:

$$\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Lambda_1\\ \Box A_1\end{matrix}\ \ldots\ \begin{matrix}\Lambda_m\\ \Box A_m\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[A_1]^{i}_{1}\ldots[A_m]^{i}_{m}\\ \Lambda_{m+1}\\ B\end{matrix}}{\Box B}\,t, i_1, \ldots, i_m\qquad [\neg\Box B]}{[\bot]}\,E\to\\ \Sigma'_{0,2}\\ \bot\end{matrix}$$

E se existe mais de uma fórmula da forma de $\neg\Box B$ que não é descarregada em Σ_0, então Σ_0 tem a seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc}
\Im_1\ \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Lambda_1\\ \Box A_1\end{matrix}\ \ldots\ \begin{matrix}\Lambda_m\\ \Box A_m\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[A_1]^{i}{}_{1}\ldots[A_m]^{i}{}_{m}\\ \Lambda_{m+1}\\ B\end{matrix}}{\Box B}\,t, i_1,\ldots,i_m\qquad[\neg\Box B]}{\bot}\,E\to & \ldots & \Im_n\ \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Lambda_1\\ \Box A_1\end{matrix}\ \ldots\ \begin{matrix}\Lambda_m\\ \Box A_m\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[A_1]^{i}{}_{1}\ldots[A_m]^{i}{}_{m}\\ \Lambda_{m+1}\\ B\end{matrix}}{\Box B}\,t, i_1,\ldots,i_m\qquad[\neg\Box B]}{\bot}\,E\to\\
 & \Sigma'_{0,2} & \\
 & \bot &
\end{array}$$

E π₁ é a dedução:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
\Im_1\ \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Lambda_1\\ \Box A_1\end{matrix}\ldots\begin{matrix}\Lambda_m\\ \Box A_m\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[A_1]^{i}{}_{1}\ldots[A_m]^{i}{}_{m}\\ \Lambda_{m+1}\\ B\end{matrix}}{\Box B}\,t, i_1,\ldots,i_m\qquad[\neg\Box B]^{j}}{\bot}\,E\to & \ldots & \Im_n\ \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Lambda_1\\ \Box A_1\end{matrix}\ldots\begin{matrix}\Lambda_m\\ \Box A_m\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[A_1]^{i}{}_{1}\ldots[A_m]^{i}{}_{m}\\ \Lambda_{m+1}\\ B\end{matrix}}{\Box B}\,t, i_1,\ldots,i_m\qquad[\neg\Box B]^{i}}{\bot}\,E\to
\end{array}\\
\dfrac{\begin{matrix}\Sigma'_{0,2}\\ \dfrac{\bot}{\Box B}\,j\end{matrix}\qquad\qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ [\Box B_1]\end{matrix}\ldots\begin{matrix}\Sigma_n\\ [\Box B_n]\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[B]^{j}{}_{0}\,[B_1]^{j}{}_{1}\ldots[B_n]^{j}{}_{n}\\ \Sigma_{n+1}\\ C\end{matrix}}{\Box C}\,r, j_0, j_1,\ldots, j_n
\end{array}$$

Assim, a dedução π₂ será:

$$\begin{array}{c}
\Im_1\ \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Lambda_1\\ [\Box A_1]\end{matrix}\ldots\begin{matrix}\Lambda_m\\ [\Box A_m]\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ [\Box B_1]\end{matrix}\ldots\begin{matrix}\Sigma_n\\ [\Box B_n]\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[A_1]^{i}{}_{1}\ldots[A_m]^{i}{}_{m}\\ \Lambda_{m+1}\\ B\quad [B_1]^{j}{}_{1}\ldots[B_n]^{j}{}_{n}\\ \Sigma_{n+1}\\ C\end{matrix}}{\Box C}\,I\Box\ \ i_1,\ldots,i_m, j_1,\ldots,j_n\qquad[\neg\Box C]^{k}}{\bot}\,E\to\quad \ldots\quad \Im_n\\
\Sigma'_{0,2}\\
\dfrac{\bot}{\Box C}\,\bot_c, k
\end{array}$$

Assim como no caso anterior pode existir alguma fórmula que seja premissa de I$_r$□ e tenha o mesmo grau da fórmula □*B*. Nesse caso o procedimento se repete em cada $\Im_i$ da mesma forma. Se π₂ não tem nenhuma fórmula *F* tal que g(*F*) = g(□*B*) então π₂ = π' e I(π') < I(π). ■

Teorema 5.11. (teorema de normalização): Se π é uma dedução de *C* a partir de Γ em NK, então π pode ser transformada em uma dedução normal de *C* a partir de Γ em NK.

Prova: seja π uma dedução de *C* a partir de Γ. Pelo lema da simplificação (lema 2.19

capítulo 2), π pode ser transformado em uma dedução simplificada π_0. A prova desse teorema de normalização é por indução no índice de π_0. Seja $I(\pi_0) = \langle d, s\rangle$.

Caso 1: $d = 1$.

Faremos a base por indução na soma das fórmulas maximais de grau d em π_0, s.

Caso 1.1: $s = 1$

Seja $I(\pi_0) = \langle d, s\rangle$. Escolhe-se uma subderivação crítica Σ tal que $g(\Sigma) = d$. Pelo lema crítico, 11, Σ pode ser transformado em uma dedução simplificada Σ' tal que $I(\Sigma') < I(\Sigma)$. Seja π_1 o resultado de substituir Σ por Σ' em π_0, e seja (A) a fórmula final de Σ',então, $I(\pi_1) < I(\pi_0)$ (detalhes na observação 12.1). Seja $I(\pi_1) = \langle d_1, s_1\rangle$ sabemos que ou $d_1 < d$ ou $s_1 < s$. Se $d_1 < d$, então $d_1 = 0$ e a soma das fórmulas maximais de π_1 é igual a 0 e π_1 é uma dedução normal. Se $s_1 < s$, então $s_1 = 0$, nesse caso, não há fórmulas maximais em π_1, ou seja, $d_1 = 0$, e π_1 é uma dedução normal.

Caso 1.2: $s > 1$

Hipótese da Indução de 's': Se s_n é uma soma de fórmulas máximas de grau 'd' menor que 's' em uma dedução π_n então π_n pode ser transformada em uma dedução normal.

Pelo lema crítico π_0 pode ser transformada em uma dedução π_1 de índice menor que o de π_0. Seja $I(\pi_1) = \langle d_1, s_1\rangle$ sabemos que ou $d_1 < d$ ou $s_1 < s$. Se $d_1 < d$, então $d_1 = 0$ e π_1 é uma dedução normal. Se $s_1 < s$, então pela H.I de 's' sabemos que π_1 pode ser transformada em uma dedução normal.

Caso 2: $d > 1$.

Hipótese da Indução de 'd': Se d_n é o grau de uma fórmula maximal em π_n, $g(\pi_n) = d_n$ e $d_n < d$, então, π_n pode ser transformada em uma dedução normal.

Caso 2.1: $s = 1$

Pelo lema crítico π_0 pode ser transformada em uma dedução π_1 de índice menor que o de π_0. Seja $I(\pi_1) = \langle d_1, s_1\rangle$ sabemos que ou $d_1 < d$ ou $s_1 < s$. Se d_1

$< d$, nós já sabemos, pelo índice, que $g(\pi_1) = d_1$, então vale H.I de '*d*' para esse caso e π_1 pode ser transformada em uma dedução normal. Se $s_1 < s$ então $s_1 = 0$, assim *d* também é igual a 0, logo π_1 é uma dedução normal.

Caso 2.2: $s > 1$

Pelo lema crítico π_0 pode ser transformada em uma dedução π_1 de índice menor que o de π_0. Seja $I(\pi_1) = \langle d_1, s_1 \rangle$ sabemos que ou $d_1 < d$ ou $s_1 < s$. Se $d_1 < d$, como sabemos pelo índice de π_1, $g(\pi_1) = d_1$, então vale H.I de '*d*' para esse caso e π_1 pode ser transformada em uma dedução normal. Se $s_1 < s$ então pela H.I de '*s*' sabemos que π_1 pode ser transformada em uma dedução normal. ■

Observação 5.11.1 :Pode-se notar que a substituição de Σ por Σ' não afeta a quantidade das fórmulas máximas de grau *d*, mas em alguns casos tem algum efeito sobre a fórmula (A). Observemos ainda que se (*A*) é uma fórmula maximal em π_1, ou ela já existia em π_0 ou $g(A) < d$. Para que fique mais explícito vemos que os casos possíveis a se considerar são: a fórmula (*A*) em Σ é ou uma conseqüência de E-regra ou de $I_r\Box$. No caso de ser uma conseqüência de E-regra ela não é uma conseqüência de E$\vee$, uma vez que todas as aplicações dessa regra têm $\bot$ como conseqüência (já que π_1 é uma dedução simplificada). Para todos os outros casos de regra de eliminação notamos que $g(A) < d$. Resta o caso em que (*A*) é conclusão de $I_r\Box$, mas, nesse caso (*A*) já era uma fórmula maximal em π_0.

Encerramos essa prova e passamos às considerações finais e gerais sobre o trabalho.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo dos capítulos desse trabalho, empreendemos o projeto de apresentar as linhas gerais da história da Lógica Modal em Dedução Natural, algumas provas de normalização para alguns sistemas (e também um breve histórico dessas provas), bem como uma nova forma de representar a hierarquia dos principais sistemas de Lógica Modal a partir do método de inferência conhecido como Dedução Natural. Consideramos para os fins desse trabalho três propriedades como importantes para um sistema de lógica modal em Dedução Natural: Equivalência ao seu respectivo sistema axiomático; método único, no que diz respeito uma certa uniformidade na estrutura das regras, como voltaremos a comentar; e existência de uma prova de normalização para o sistema. A contribuição do trabalho, na apresentação dessa hierarquia de sistemas, consiste em provar que os sistemas apresentados possuem duas das três propriedades acima. Nossos sistemas são todos equivalentes a seus respectivos sistemas axiomáticos e têm método único de formalização. Contudo, temos apenas um indicativo de que são meta-teoreticamente relevantes. Vamos agora analisar mais profundamente essas três propriedades.

A equivalência tratada aqui é a dedutiva entre os sistemas Axiomáticos e seus correspondentes em Dedução Natural. A prova de equivalência é a meta-demonstração de uma sentença "bimplicacional", isto é: "um teorema é provado no sistema S se e somente se é provado no sistema N[27]". Fizemos essa prova por indução, para os sistemas apresentados, em dois passos: (i) provamos que todos os teoremas de S são também teoremas de N e (ii) provamos que todos os teoremas de N também são teoremas de S. Fizemos a prova de (i) levando em conta todos os Axiomas de S, dos quais são deduzidos todos os teoremas, e a prova de (ii) levando em conta as formas das fórmulas que podem ser obtidas em N. Por (i) e (ii) sabemos agora que S e N têm exatamente os mesmo teoremas. No nosso trabalho provamos precisamente que os sistemas **NK**, **ND**, **NT**, **NK4**, **NS4**, **NB** e **NS5** são equivalentes aos sistemas **K**, **D**, **T**, **K4**, **S4**, **B** e **S5** respectivamente.

Quanto ao método único (uniformidade estrutural das regras) algumas coisa precisam ser esclarecidas. A palavra "método" tem sido usada em muitos sentidos desde a introdução. Fizemos a observação sobre dois níveis de métodos dedutivos, e dissemos que, um de relevância filosófica, pode ter diversas formalizações. A essas formalizações também

---

[27] Onde S é um sistema axiomático e N um sistema de Dedução Natural.

chamamos de métodos dedutivos (método Axiomático, método de Dedução Natural e cálculo de seqüentes). Nessa confusão também tem sua parcela de culpa a ambigüidade da palavra "dedução", contudo, deixamos claro que tínhamos em vista ao longo do trabalho apenas métodos dedutivos formais. Ainda, depois de tudo isso, estamos nos atendo à palavra "método" para nomear os procedimentos sintáticos estabelecidos em sistemas de dedução natural em linha (à la Fitch), em árvore e em árvore etiquetadas. Nossa intenção quanto essa propriedade diz respeito a esse último sentido da palavra método. Apresentamos uma hierarquia de sistemas de lógica modal em dedução natural, com alguns sistemas já existentes e outros novos, onde todos eles são formalizados no método de dedução natural em árvore sem etiquetas.

Todos os sistemas aqui apresentados também são formalizados no método de árvores etiquetadas, como pode-se ver em *Labelled Non-classical logics* (Viganò, 2000). Nós consideramos, contudo, que a hierarquia dos principais sistemas modais normais adiciona à lista apresentada aqui o sistema GL para lógica da provabilidade. O sistema GL é um sistema modal que capta a característica da aritmética que é demonstrada no teorema de Gödel. O sistema GL acrescenta o axioma L[28] ($\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$) ao sistema **K** e interpreta o operador $\Box$ como demonstrável na aritmética de Peano (AP). Intuitivamente nos parece que deve ser teorema em GL que, se uma sentença (A) é demonstrável em AP, então (A) é o caso em AP, o que formalizando seria ($\Box A \rightarrow A$). Supondo que isso seja o caso vejamos a demonstração abaixo:

1 – $\vdash \Box(B\wedge\neg B) \rightarrow (B\wedge\neg B)$	Instância do Teorema T (Hipótese)
2 – $\vdash \Box\,(\Box(B\wedge\neg B) \rightarrow (B\wedge\neg B))$	RN em 1
3 – $\vdash \Box(\Box(B\wedge\neg B) \rightarrow (B\wedge\neg B)) \rightarrow \Box(B\wedge\neg B)$	Instância do axioma L
4 – $\vdash \Box(B\wedge\neg B)$	MP: 2,3
5 – $\vdash\ B\wedge\neg B$	MP: 4,1

A conclusão dessa derivação prova que se o sistema GL admitir o esquema T como teorema então ele é inconsistente. O esquema T não é demonstrável em GL. O esquema T também não é válido nas classes de estruturas que tornam válidos o esquema L. Essa classe de estruturas é a classe onde as relações entre mundos é transitiva finita, Boolos (Boolos, 1993) diz que é uma relação que tenha a sua relação inversa bem fundada, é uma relação que não permite para qualquer que seja o w_x que: (wRw_0 e w_0Rw_1 e w_1Rw_2 ...). Se admitirmos a relação reflexiva wRw podemos ter uma transitividade infinita da forma (wRwRwRw ...), portanto a

---

[28] Devido a M. H. Löb.

reflexividade não é uma relação da estrutura de GL, mas, como ela é a relação cuja a classe dos enquadramentos que torna válido o esquema T.

Falamos de GL em um sistema axiomático, mas nosso foco é seu tratamento em dedução natural. Embora tenhamos feito esse breve rodeio a apresentação de GL em um sistema axiomático e essa breve discussão sobre a semântica de GL, isso vai nos ajudar a chegar em nosso ponto. Vimos que os sistemas etiquetados utilizam fórmulas relacionais que orientam as regras e especificam os sistemas que estão sendo tratados, vimos também, que o que chamamos de etiqueta são termos da linguagem (constantes, variáveis e funções), com isso podemos ver, por último, que as formalizações nesse sistema das regras relacionais dependem de fórmulas de primeira ordem, ou são baseadas nelas. Com isso queremos dizer, que a regra *ref*, que representa a reflexividade, é baseada na formalização em primeira ordem dessa propriedade de relações, ou seja, na fórmula $\forall x(Rxx)$, a regra *sim* (simetria) em $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$, a regra *tran* (transitividade) em $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$, e assim por diante. O problema, porém, está na representação formal da relação transitiva finita que é a relação da classe de enquadramentos onde o axioma L é válido. A relação de finitude é reconhecidamente uma relação de segunda ordem, e não há nos sistemas etiquetados regras para fórmulas de segunda ordem. Não tomamos conhecimento de que haja uma maneira de representar o sistema GL fazendo uso do método de árvores etiquetadas, ou de que já exista tal sistema. A favor de nossos sistemas, no entanto, existe uma formalização do sistema GL em dedução natural em árvores sem etiquetas. É um sistema criado por Gianluigi Bellin (Bellin, 1995) para o qual ele apresenta seguinte regra de introdução do □ (GLR) :

$$\text{GLR) }\ \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Box B_1\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \Box B_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \Box B_{n+1}\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Sigma_{n+p}\\ \Box B_{n+p}\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B_1]^1 \ldots [B_n]^n \ldots [\Box A]^0\ [\Box B_{n+1}]^{n+1} \ldots [\Box B_{n+p}]^{n+p}\\ \Sigma_{n+p+1}\\ C\end{array}}{\Box C}\ 1 \ldots 0 \ldots n+p$$

Com isso fizemos a apresentação da última regra, do último sistema que compõe nossa hierarquia, e que agora está completa.

Quanto à normalização, já dissemos que os sistemas em estilo Fitch não são normalizáveis, e essa é uma qualidade decisiva e amplamente discutida ao longo do trabalho. Não apresentamos para todos os nossos sistemas uma prova de normalização, contudo, temos o esquema da prova dada para o sistema **NK** no capítulo 5, e um indicativo de que poucas mudanças são necessárias para que obtenhamos a normalização do sistema **NS4**. Além desses o sistema GL de Bellin traz uma prova de normalização no mesmo artigo acima citado. Mesmo que a atribuição dessa terceira propriedade não esteja concretizada para nossa hierarquia de sistemas, uma vez **NK** é a base estrutural de todos os outros e possível gerar certa expectativa favorável quanto a essa última etapa do projeto. É interessante levar em conta também que mesmo com todo o trabalho se restringindo a lógicas modais clássicas e proposicionais, não se isolam as perspectivas de uma ampliação para sistemas de primeira ordem e nem para outras lógicas, como a lógica intuicionista, por exemplo.

Por fim trazemos algumas perspectivas para a ampliação desse trabalho. Em primeiro lugar, se faz mister a demonstração detalhada da uma prova de normalização para todos os sistemas apresentados acima. Essa é a perspectiva que mais motiva a ampliação do trabalho, pois uma vez que o sistema GL já possui uma formulação e uma prova de normalização conhecida na literatura e apresentada por Bellin, nossa forma de apresentação pode ser capaz de representar as lógicas modais de K a GL com as três propriedades desejáveis a elas, o qual não é o caso das outras formulações. Em segundo lugar há a perspectiva de ampliação dos nossos sistemas proposicionais a sistemas de primeira ordem, a qual é uma missão reconhecidamente laboriosa, mas que pode trazer bons frutos. Em terceiro lugar, uma tarefa não menos complicada é usar essa formulação para representar Lógicas Modais não-clássicas. As três perspectivas indicam que há razões para desejar a expansão do projeto e que essa expansão é relevante.

REFERÊNCIAS

ALVES, D. D. P. *Normalização Forte via Ordinal Natura*l. (Tese de Doutorado) Universidade Estadual de Campinas, 1999.

ANDOU, Y. *A note on modal logic S4 in natural deduction.* Disponível em: *http://www.hosei.ac.jp/museum/html/kiyo/58/articles/Andou.pdf* .

BELLIN, G. *A sistem of natural deduction for GL*. Theoria vol. 7. pg 89 – 114. 1995.

BIERMAN, G. M.& PAIVA V. C. V. *On a intuitionistic modal logic*, Studia logica, vol. 65 (2000), pg. 383- 416

BOOLOS, G. *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

BULL, R. & SEGERBERG K. *Basic modal logic*. In: D. Gabbay & F. Guenthner, eds, *Handbook of Philosophicall Logic*, volume II, pages 1–88. Reidel, Dordrecht, 1986.

CHELAS, B. F. *Modal logic: an introduction.* Cambridge University Press, 1980.

GENTZEN, G. *Investigations into logical deduction,* In: *The collected papers of Gerhard Gentzen.* North Holland publishing company, ltd. Londres, 1969.

HAWTHORN, J. *Natural deduction on normal modal logic* . Notredame journal of formal logic. Volume 31. Number 2. Springer 1990.

HUGHES, G. E & Cresswell M. J. *A new introduction to modal logic*. Routledge, 1996.

GOUVEIA, P.; DIONÍSIO F. M. & MARCOS. J. *Lógica Computacional.* DMIST, 2000.

MARTINS, L. R. & MARTINS A. T. *Normalizable Natural Deduction System for Complete Classical S4.* In: BEZIAU, J. Y. & COSTA-LEITE, A. *Dimensions of Logical Concepts*. Campinas: Coleção CLE, 2009. v. 54.

MARTINS, L.R., and MARTINS, A.T. *Natural Deduction for Full S5 Modal Logic with Weak Normalization.* 12º Workshop on Logic, Language, Information and Computation, Florianópolis, 2005, 121-32.

MARTINS, A. T.; OLIVEIRA, A. G. De & QUEIROZ, R. J. G. B. de. *Uma introdução à teoria da prova.* I Jornada de Atualização em Inteligência Artificial 3, 2001. Edições SBC.

MEDEIROS, M. P. N. *Traduções via teoria da prova: aplicações à lógica linear.*

EDUFRN, Natal, 2002.
------------------ *A new S4 classical modal logic in natural deduction.* JSL vol. 71, Number 3, Sept. 2006.

MENDELSON, E. *Introduction to matematical logic.* D. Van Nostrad Company Ltd., Princeton, N. J. 1964.

MOURA, J. E. A. *Um estudo em C_w em cálculo de seqüêntes e dedução natural.* (Tese de doutorado) Universidade Estadual de Campinas, 2001.

NAGEL, E. & NEWMAN, J. R. *A prova de Gödel*. 2 ed. São Paulo: Perspectiva 2001.

PELLETIER, F. J. *History and Philosophy of Logic*, 1464-5149, Volume 20, Issue 1, 1999, Pages 1 – 31

PEREIRA, L.C.P.D. & MASSI C. *Normalizacão para a lógica clássica*. O que nos faz pensar, 2:49-53, 1990.

PRAWITZ, D. *Natural deduction*: A Proof-Theoretical Study. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1965.

QUINE, W. V. *On natural deduction*. JSL vol. 15 1950.

ROBINSON, O. A. *A modal* natural *deduction system for S4* Notre Dame Journal of Formal Logic Volume XX, Number 3, July 1979 NDJFAM.

SIMPSON, A. K., "*The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*", Tese de doutorado, University of Edinburgh, 1994.

STÅLMARK, G. *Normalization theorems for full first order classical natural deduction*. JSL vol. 56 1991.

VIGANÒ, L. *Labelled Non-classical logics*. Kluwer Academic Publishers, 2000.